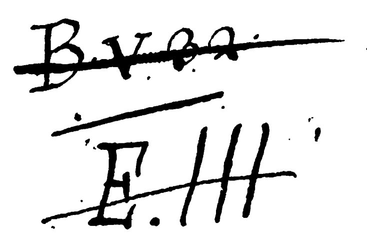





Cours de Mathematique
par M.r Ozanam.

COURS DE MATHEMATIQUE,

QUI COMPREND

Toutes les Parties les plus utiles & les plus necessaires à un homme de Guerre, & à tous ceux qui se veulent perfectionner dans cette Science.

TOME PREMIER.

Qui contient l'Introduction aux Mathematiques, & les Elemens d'Euclide.

Jacques

Par M^r. OZANAM, Professeur des Mathematiques.

NOUVELLE EDITION REVEUE ET CORRIGÉE.





A PARIS,

Chez JEAN JOMBERT, prés des Augustins.

M. DC. XCVII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.


Iac: Ph: Spada.
Bonacorsi Equ: Ierosolomitan
V.d. Gutwein fe:



PREFACE.

APRE'S tant d'Ouvrages qu'on a donnez au Public ſur les Mathematiques ; ſoit de ſes parties en détail, ſoit en Corps, & par maniere de Cours que l'on appelle de Mathematiques, à l'exemple de ceux qu'on a compoſez des autres Sciences ; il ne me ſeroit pas venu dans l'eſprit de multiplier cette ſorte d'Ouvrages ; & de compoſer ce nouveau Cours de Mathematiques, ſi je n'avois vû que ceux qui ont été publiez juſqu'à

present, sont peu utiles : les uns parce qu'ils sont trop amples, leur abondance accable la paresse de ce Siecle, elle fait peur aux esprits qui ne sont pas laborieux, & dissipe les mieux intentionnez : les autres parce qu'ils sont trop abregez, ils n'instruisent pas assez, ils supposent des Sçavans, & ne les font pas, car il est presque impossible d'être court, & de conserver la clarté qu'il faut pour instruire ceux qui commencent : les autres enfin ont été écrits en des Langues étrangéres, & sur tout en Latin, car par le malheur du temps il se trouve peu de jeunes gens qui soient assez habiles en cette langue, pour lire avec plaisir les Livres qui sont écrits en Latin, & pour entendre les Termes avec facilité.

Je me suis flatté de l'esperance que je réüssirois en mon dessein par le grand desir que j'ay de voir fleurir cet Art, qui a fait le caractere des Siecles les plus polis, les plus spiri-
tuels,

tuels, & les plus sçavans, & par les bonnes dispositions que je connois dans les esprits de celuy-cy: car tout le monde veut être Mathematicien, principalement les Princes & les Grands qui se distinguoient auparavant par le mépris des Ecoles & de la discipline, & qui à present s'adoucissent & se captivent par les charmes des Mathematiques. La necessité où ils sont de se rendre habiles dans l'art de la Guerre, qui ne peut subsister sans le secours des Mathematiques, leur fait interrompre leurs amusemens pour s'y appliquer; & les plaisirs inesperez qu'ils y trouvent, les surprennent & les enchantent de telle sorte, que la plûpart en font leurs délices, aussi-bien que les plus serieuses de leurs occupations.

Je ne promets pas à mon Lecteur un stile & des expressions élegantes, comme sont celles qu'on n'employe que pour chatoüiller les oreilles, je ne l'invite pas aux plaisirs délicats, & à cette volupté spirituelle, par laquel-

le les Muſes enchantent ceux qui ont le loiſir de les écouter : mais je luy prepare des choſes plus ſolides, & des plaiſirs dignes de l'homme & de ſa raiſon. On connoît le genie du Lecteur ſur ſon choix, & par la preference qu'il donne aux Ouvrages ; Achille avoit été élevé ſous des habits de fille, & il n'étoit pas connoiſſable : d'abord qu'on luy preſenta d'un côté des bijoux & des bagatelles, & de l'autre des armes, ſon genie né pour les grandes choſes trahit le ſecret de ſon éducation, & l'on connut par ſon choix qu'il étoit né pour être un Heros. On connoît dés l'enfance les genies qui ſont nez pour quelque choſe de plus que les autres, par le choix de leurs plaiſirs & de leurs amuſemens, & l'on n'a preſque jamais vû un enfant ſe plaire à des choſes qui approchent des Mathematiques, qui ne ſoit devenu quelque choſe de plus que les autres,

tres,

tres, quelque employ qu'il ait eu dans la suite.

Je ne diray icy aucun mot de l'utilité des Mathematiques, parce que j'en ay assez parlé dans mon Dictionnaire de Mathematique, que j'ay fait imprimer depuis quelques années, & de peur qu'on n'exige de moy un plus grand Ouvrage que celuy que je prétens donner au Public. Comme je connois qu'on devroit quitter toutes les autres études pour s'appliquer aux Mathematiques, ou du moins qu'on devroit interrompre & suspendre ses études, jusqu'à ce qu'on eût appris dans les Mathematiques l'art de justesse, de methode, & d'élevation, qu'on eût en un mot appris à raisonner, & à connoître quand on raisonne, quand on connoît la verité, & qu'on ne se trompe pas par les apparences de la vrai-semblance; je crains qu'on ne me reproche ou la paresse, ou le peu de soin pour le Public, que je fais pro-

fession de servir depuis si long-temps. Je sçay que parlant en general, & jugeant des choses par leur bonté, on ne devroit presque donner aucune borne aux Livres de Mathematique, & qu'on devroit aller toûjours plus loin, puisqu'on est dans un chemin où l'on ne peut pas s'égarer, & qu'on tient une matiere qu'on ne peut pas épuiser : mais je suis contraint de m'accommoder au goût de ceux qui sont d'humeur de profiter de mon travail, parce qu'il est plus court & plus aisé, & qu'ils se rebuteroient s'il étoit plus long.

Ceux qui travaillent pour le plaisir, sçavent bien le secret de s'arrêter sur l'appetit, & de ne lasser jamais le goût : il faut de même que ceux qui travaillent sur les Sciences, se donnent des bornes. Neanmoins je ne me suis pas icy tellement resserré, que je ne remplisse suffisamment l'idée d'un honnête homme qui veut connoître nôtre Art, & que je ne luy découvre

assez

aſſez de nos myſteres, afin de pouvoir faire de luy même tels progrés qu'il voudra, ſoit pour la lecture de toute ſorte d'Auteurs, ſoit pour ſes reflexions particulieres. Je m'éforce ſur toutes choſes à parler avec la plus grande clarté qu'il m'eſt poſſible, ſans m'attacher à des phraſes étudiées, ni à des paroles inutiles. Je ne ſuppoſe pas des Lecteurs déja ſçavans & verſez dans les termes de l'Art, & dans nos manieres de parler & de raiſonner, mais je les leur enſeigne, & je ne laiſſe pas paſſer un terme ſi peu hors du commun, que je ne l'explique, pour ne laiſſer aucune difficulté.

Pour accoûtumer les eſprits à raiſonner ſur un objet abſtrait & dégagé de la matiere, tel qu'eſt celuy de la Mathematique, je commence par une Introduction aux Mathematiques, où l'on trouve une idée générale de cette Science, dont les termes les plus généraux y ſont expli-

pliquez par ordre, avec quelques Problêmes resolus par le Compas & par la Regle; pour dégrossir la main de ceux qui commencent; & parce que sans l'Algebre on ne peut pas connoître facilement les rapports des differentes especes de quantité, ni resoudre d'abord un Problême, & encore moins découvrir quelque Theorême, ou en trouver sa démonstration quand il est connu, j'ay jugé à propos d'inserer dans nôtre Introduction un abregé d'Algebre, dont le nom ne doit pas éfrayer les Lecteurs, car ce n'est qu'une Methode de raisonner par le moyen des lettres de l'Alphabet, qui representent les quantitez, dont on considere les rapports, & elle est comme la Logique à l'égard de la Philosophie ordinaire, ce qui l'a fait appeller Logistique, qui est devenuë si commune parmi nous, à cause de sa beauté & de sa grande utilité pour toutes les parties de Mathemati-

matique, que des Dames de la plus haute qualité l'ont bien voulu apprendre, & Madame la Duchesse d'E... la possede à un tel degré de perfection, tant à l'égard des Nombres, qu'à l'égard de la Geometrie, que les plus Sçavans recherchent avec empressement l'honneur de sa conversation. Un exemple si illustre doit bannir toutes sortes de crainte, & réveiller les paresseux.

Et pour disposer les esprits à ne se laisser jamais gagner par les apparences, je fais succeder à mon Introduction les Elemens d'Euclide, qui sont une espece d'Introduction aux Mathematiques, & qui étant bien entendus, on trouvera peu de difficulté dans les autres parties de Mathematique, qui se démontrent toutes par ces Elemens: où vous verrez que pour devenir Mathematicien, il faut faire abstraction de tout ce qui tombe sous les sens, & envisager la quantité tout-à-fait abstraite & dégagée de toute ma-

tiere

tiere. Il faut pour cela se resoudre dés le commencement à raisonner de cette maniere dégagée, il faut s'accoûtumer à ces idées éloignées du commerce de la matiere, il faut de plus se faire une habitude de ne donner son approbation qu'à des choses évidentes, & dont on soit convaincu qu'elles ne peuvent être d'une autre maniere. Enfin on bannit des Mathematiques tous les doutes & toutes les probabilitez, car on ne veut que des certitudes & des démonstrations.

Je ne parleray pas icy en particulier des autres Parties de nôtre Cours de Mathematique, parce que je ferois une Preface trop longue, on oublieroit les idées que j'ay voulu donner de ces deux Introductions, & l'on croiroit peut-être tout sçavoir, quand on auroit seulement oüi parler de cette Science. J'attens à dire un mot de toutes ces parties dans les autres Volumes, comme j'ay fait de celles qui sont dans celuy-cy, afin que le Lecteur en

trou-

trouvant au commencement de chaque Volume des considerations particulieres sur les matieres qui y sont contenuës, entreprenne cette étude avec plus de plaisir, & pour ainsi dire, avec plus d'avidité d'apprendre & de sçavoir des choses, dont on luy étale & l'utilité & la beauté.

Je diray donc seulement que je divise tout ce Cours de Mathematique en cinq Volumes, dont le premier comprendra l'Introduction aux Mathematiques, & les Elemens d'Euclide: le second l'Arithmetique, & la Trigonometrie: le troisiéme la Geometrie, & la Fortification: le quatriéme la Mecanique & la Perspective: & le dernier la Geographie, & la Gnomonique; omettant les autres Parties de Mathematique, parce qu'elles sont moins utiles à un homme de Guerre, en faveur duquel principalement ce Cours de Mathematique a été composé, & sur tout aux Personnes de qualité, qui n'ont pas tout le temps qui seroit necessaire

pour lire ces grands Cours, où l'on affecte de ne rien oublier. Si les Idées générales que je leur donne en ce Cours, leur laissent un goût de sçavoir tout le reste, j'ose leur assurer que les Traitez separez que j'ay faits, & que je me dispose à faire aprés ceux-cy, leur donneront toute la satisfaction qu'ils peuvent souhaiter. Je destine entr'autres un Traité separé des Recreations Mathematiques & Physiques, où je traiteray de l'Hydraulique, de la Pneumatique, & des autres Parties les plus curieuses.



INTRODUCTION
AUX
MATHEMATIQUES.

LA Mathematique eſt une Science, qui conſidere ce qui ſe peut meſurer & compter : & comme tout ce qui ſe peut meſurer & compter eſt la quantité concréte & diſcréte, c'eſt à dire continuë & non continuë, il s'enſuit que l'objet des Mathematiques eſt la quantité ou grandeur finie, qui eſt capable d'augmentation par addition ou par multiplication, & de diminution par ſouſtraction ou par diviſion; & lorſque cette grandeur a une étenduë ſenſible, ce qui s'appelle *Dimenſion*, comme la Ligne, la Surface & le Solide : & même le Temps, le Mouvement & la Peſanteur, elle devient l'objet de la *Geometrie* : mais quand la même quantité n'a aucune étenduë ſenſible, comme le Nombre, dont les Dimenſions ne ſont qu'intelligibles, c'eſt à dire que nous n'appercevons que par la penſée, elle devient l'objet de l'*Arithmetique*.

Ces deux Parties, l'Arithmetique & la Geometrie, qui font ce qu'on appelle communément *Mathematique ſimple*, & que Platon appelle les deux aîles du Mathematicien, s'aident mutuellement l'une & l'autre, & ſont le fondement des autres Parties de Mathematique qui compoſent ce que l'on nomme ordinairement la *Mathematique mixte*, comme l'Aſtronomie, l'Optique, la Mecanique, &c. leſquelles ne ſont que des connoiſſances Phyſiques expliquées par les principes de l'Arithmetique & de la Geometrie.

Quoique les Mathematiques ne conſiderent que la Grandeur, neanmoins elles ne la conſiderent pas abſolument & en elle-même, mais ſeulement le rapport qu'elle peut avoir

avec une autre grandeur de même genre, en comparant ensemble ces deux grandeurs homogénes, pour y découvrir quelque verité cachée, & la démontrer ensuite par des raisonnemens fondez sur d'autres veritez, qui sont naturellement connuës de tout le monde, & qui à cause de cela sont appellées *Communes Notions de l'esprit*, ou *Principes*, dont il y en a de trois especes, sçavoir les *Definitions*, les *Axiomes*, & les *Demandes*.

Les DEFINITIONS sont l'explication des mots & des termes, qui entrent dans une Proposition, pour la rendre claire & nette, & pour éviter dans sa démonstration toute sorte d'objections & de difficultez.

Les AXIOMES, ou *Maximes*, sont des Propositions simples & générales, dont la connoissance est si évidente d'elle-même, que personne ne les peut nier sans démentir les sens & la raison naturelle : de sorte que tout homme raisonnable est contraint d'en tomber d'accord, n'y ayant point de preuve qui l'en puisse mieux convaincre que la lumiere naturelle de l'esprit. Comme quand on dit que *d'un point à un autre point on ne peut tirer qu'une ligne droite*.

Les DEMANDES sont des suppositions de certaines pratiques, dont l'execution est si facile d'elle-même, que tout homme de bon sens & de jugement ne la sçauroit ignorer ny contester. Comme de *décrire sur un Plan un Cercle avec un compas*. Elles sont appellées *Demandes*, parce que l'on demande qu'on accorde qu'elles sont naturellement connuës de chacun, & si faciles qu'on n'a besoin d'aucun maître pour les apprendre, pour n'être pas obligé de les démontrer.

Ces trois sortes de Principes étant accordez, les Mathematiciens s'en servent pour la démonstration des Propositions qu'ils avancent, lesquelles sont de deux sortes, sçavoir les *Propositions Principales*, qui sont ou des *Problêmes*, ou des *Theorêmes* : & les *Propositions moins principales*, qui sont ou des *Corollaires* ou des *Lemmes*, lesquels servent à leur tour, quand ils ont été démontrez, pour la preuve des autres Propositions qui en dépendent.

Le PROBLEME est une Question qui propose à executer quelque chose, & enseigne à la faire & à la construire par les Principes precedens, touchant quelque pratique necessaire pour l'ordinaire à la démonstration. Comme de *trouver le centre d'un cercle donné*. Il y a de plusieurs sortes de Problêmes, dont quelques-unes seront icy expliquées aprés avoir dit ce que c'est que *Donné*.

Nous dirons donc que par ce mot *Donné*, les Mathematiciens entendent ce dont on connoît la grandeur, ou la position, ou l'espece, ou la proportion : de sorte que quand sa grandeur est connuë, on l'appelle, *Donné de grandeur* :

& quand sa position est connuë, il est appellé *Donné de position* : mais quand sa grandeur & sa position sont connuës, on le nomme *Donné de grandeur & de position*. Ainsi d'un cercle décrit sur un Plan, son centre est donné de position, son diametre est donné de grandeur, & le cercle est donné de grandeur & de position : & si l'on tire un diametre comme l'on voudra, ce diametre sera donné de grandeur & de position. Le cercle peut seulement estre donné de grandeur, sçavoir lorsque ce cercle est seulement par imagination, & que l'on connoît seulement la grandeur de son diametre : Enfin quand son espece est connuë, on l'appelle *Donné d'espece* : & quand de deux grandeurs le rapport est connu, on les appelle *Données de proportion*, &c.

Il y a des Problêmes qu'on appelle *Ordonnez*, & *Inordonnez* : *Déterminez* & *Indéterminez* : *Simples*, *Plans*, *Solides* & *Sursolides*, c'est à dire *plus que Solides*.

Le *Problême Ordonné* est celuy qui ne peut être fait qu'en une seule façon : comme de *faire passer une circonference de cercle par trois points donnez*, n'y ayant qu'un seul cercle, dont la circonference puisse passer par trois points donnez. §. 4

Le *Problême Inordonné* est celuy qui peut être fait en une infinité de façons differentes : comme de *décrire une circonference de cercle par deux points donnez*, étant évident que par deux points donnez on peut décrire une infinité de circonferences de cercles differens.

Le *Problême Déterminé* est celuy qui n'a qu'un certain nombre déterminé de solutions : comme de *diviser une ligne donnée en deux également*, ce Problême n'ayant qu'une solution : ou bien de *trouver deux nombres entiers en sorte que la difference de leurs quarrez soit* 48. ce Problême n'ayant que deux solutions, sçavoir 8, 4, & 7, 1, pour les deux nombres qu'on cherche. §. 11

Le *Problême Indéterminé*, ou *Local* est celuy qui peut avoir une infinité de solutions differentes, de sorte que le point qui contribuë à la resolution du Problême, quand il est de Geometrie, se peut prendre à volonté dans une certaine étenduë, qu'on appelle *Lieu Geometrique*, qui peut être une Ligne, un Plan, ou un Solide : & alors on dit que le Problême est un *Lieu*, qu'on appelle *Lieu Simple*, ou *Lieu à la ligne droite*, quand le point qui resoud le Problême est dans une ligne droite : *Lieu Plan*, ou *Lieu au Cercle*, quand ce point se trouve sur la circonference d'un Cercle : *Lieu Solide*, quand le même point se trouve sur la circonference d'une section conique autre que le Cercle, comme d'une Parabole, d'une Hyperbole, ou d'une Ellipse, &c.

Le *Problême Simple*, ou *Lineaire*, est celuy que l'on peut resoudre en Geometrie par la rencontre de deux lignes droites. Il est évident qu'un semblable Problême est *Ordonné*,

parce qu'il ne peut avoir qu'une solution, puisque deux lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point.

Le *Problême Plan*, est celuy que l'on peut resoudre en Geometrie par l'intersection de deux circonferences de cercle, ou bien par la rencontre d'une circonference de cercle & d'une ligne droite. Il est évident qu'un semblable Problême ne peut avoir que deux solutions, parce que deux circonferences de cercle, ou une ligne droite & une circonference de cercle, ne se peuvent couper qu'en deux points.

Le *Problême Solide*, est celuy qui se peut resoudre en Geometrie par la rencontre de deux Sections Coniques autres que deux Cercles. Il est évident qu'un semblable Problême ne peut avoir tout au plus que quatre solutions, parce que deux sections coniques ne se peuvent couper en plus de quatre points.

Le *Problême Sursolide*, est celuy qui ne se peut resoudre en Geometrie qu'en se servant de quelque ligne courbe d'un genre plus élevé que les sections coniques. Il est évident qu'un semblable Problême peut avoir plus de quatre solutions, parce qu'une ligne courbe d'un genre plus élevé que les sections coniques peut être coupée par une autre ligne courbe en plus de quatre points.

Un Problême tres-facile & presque connu de luy-même, qui sert pour en resoudre de plus difficiles, s'appelle *Porime*, du mot grec *Porimos*, qui signifie une chose facile à comprendre, & qui ouvre le chemin à des choses plus dif-
3. 1. ficiles: comme de *retrancher d'une ligne donnée une ligne plus petite d'une grandeur donnée.*

Un Problême qui est possible, mais qui n'a pas encore été resolu, pour avoir semblé trop difficile, se nomme *Apore*: comme la *Quadrature du Cercle*. Avant Archimede la *Quadrature de la Parabole* étoit un Apore.

Par ce mot de *Quadrature* on entend dans les Mathematiques la maniere de reduire en figure rectiligne une *Figure curviligne*, c'est à dire une figure terminée par des lignes courbes, parce que toute figure rectiligne se peut aisément reduire en Quarré. Ainsi la *Quadrature de la Parabole* est la maniere de trouver une figure rectiligne égale à une Parabole: & la *Quadrature du Cercle* est la maniere de décrire une figure rectiligne égale à un cercle donné.

Le THEOREME est une Proposition déterminée touchant la nature & les proprietez d'une chose, qui enseigne à connoître une verité cachée, & la déduire de ses propres
5. 1. principes. Telle est cette Proposition qui porte, que *quand les deux côtez d'un triangle sont égaux, les deux angles à la base sont aussi égaux.*

Un Theorême général qui se découvre dans un lieu que

l'on a trouvé, s'appelle *Porisme*: de sorte que quand on a trouvé par l'Analyse ancienne, ou moderne, la construction d'un Problême local, & que de la construction de ce lieu, on en tire un Theorême général, ce Theorême est appellé *Porisme*. Ainsi un *Porisme* n'est autre chose qu'un Corollaire énoncé en Theorême, que l'on découvre dans un lieu, construit & démontré, pouvant servir, comme dit Pappus, pour la construction des Problêmes les plus généraux & les plus difficiles : aussi ce mot de *Porisme* vient de *Poriso*, qui en grec signifie selon Proclus, établir & conclure de ce qui a été fait & démontré, ce qui luy a fait definir le *Porisme* un Theorême tiré par occasion d'un autre Theorême fait & démontré.

Le COROLLAIRE est une verité necessaire & évidente, c'est à dire une consequence que l'on tire évidemment de ce qui a été fait ou démontré. Comme si du Theorême precedent, par lequel nous apprenons que *les deux angles d'un* 5. 1.
triangle sont égaux, lorsque les deux côtez opposez sont égaux, on conclut que *les trois angles d'un triangle équilateral sont égaux*.

Le LEMME est une proposition qui est mise là où elle est, pour servir à la Démonstration d'un Theorême, ou à la resolution d'un Problême. On le met ordinairement devant la Démonstration du Theorême, afin que cette Démonstration soit moins embarassée: ou devant la resolution du Problême, pour rendre cette resolution plus courte. C'est ainsi qu'Euclide enseigne dans ses Elemens à *tracer un triangle équilateral*, avant que d'enseigner la maniere de *tirer d'un* 1. 1.
point donné une ligne droite égale à une donnée: & qu'il démon- 2. 1.
tre un Theorême avant que de démontrer son inverse, qu'ailleurs nous avons appellé *Theorême reciproque*.

On peut aussi mettre au nombre des Propositions moins principales le *Scolie*, que nous expliquerons aprés avoir dit ce que c'est que *Démonstration*, & expliqué ses differentes especes.

La DEMONSTRATION est un ou plusieurs Syllogismes ou Raisonnemens successifs, tirez les uns des autres, qui démontrent clairement & invinciblement une Proposition, c'est à dire qui convainquent l'esprit de la verité ou de la fausseté, de la possibilité ou de l'impossibilité d'une Proposition: & sans Démonstration, on a toûjours lieu de douter de la Proposition, à moins qu'elle ne soit un Principe, parce qu'il arrive souvent qu'une Proposition est fausse quand elle paroît veritable aux sens, & aussi à l'esprit, qui se laisse souvent tromper par les sens, lorsqu'il ne l'a pas assez examinée.

Ces raisonnemens sont fondez sur les trois sortes de prin-

cipes dont il a été parlé auparavant, en les appliquant proprement les uns aux autres, c'est à dire en appliquant une verité sur une autre, & en concluant de ces deux veritez une troisiéme verité, & en continuant de la sorte à déduire des veritez les unes des autres, en se servant avec choix & par ordre non seulement des Definitions, des Axiomes, & des Demandes, qui ont été accordées, mais encore des Theorêmes, des Problêmes, des Lemmes, & des Corollaires, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à une derniere verité, qu'on appelle *Conclusion*, parce qu'elle conclut & acheve de convaincre pleinement l'esprit de ce que l'on veut démontrer.

Outre la Conclusion, il y a encore dans une Démonstration, *l'Hypothese*, qui est une supposition des chôses qui sont connuës ou données dans une Proposition que l'on veut démontrer ou construire : & la *Preparation*, qui est une construction que l'on fait par avance en tirant quelques lignes soit effectivement, soit par pensée, pour faire la démonstration avec facilité, & conduire plus facilement l'esprit à la connoissance de la verité que l'on se propose de démontrer.

Il y a plusieurs sortes de Démonstrations, dont les deux plus considerables sont celles qu'on appelle *Positives*, ou *Affirmatives*, ou *Directes*: & *Negatives*, ou *à l'impossible*, ou *Indirectes*.

La *Démonstration Positive*, ou *Affirmative*, ou *Directe*, est celle qui par des Propositions affirmatives & évidentes, tirées directement les unes des autres, découvre à fond la verité qu'on cherche, & finit par ce que l'on prétend démontrer, ensorte qu'elle force la raison à consentir à cette
1. 1. verité. Telle est la démonstration de la *P. 1. L. 1. des Elemens d'Euclide*, & plusieurs autres.

La *Démonstration Negative*, ou *à l'impossible*, ou *Indirecte*, est celle qui démontre une verité par quelque absurdité qui s'ensuivroit necessairement, si la Proposition qu'on avance, & qu'un esprit opposé conteste, n'étoit pas veritable. C'est
6. 1. ainsi que pour démontrer qu'*un triangle qui a deux angles égaux a aussi deux côtez égaux*, Euclide fait voir que la partie seroit égale au tout, si l'un de ces deux côtez étoit plus grand que l'autre, pour conclure de là qu'ils sont égaux.

Chacune de ces deux Démonstrations convainc également l'esprit, & l'oblige à consentir à la verité qu'on a démontrée, mais elle ne l'éclaire pas également, étant certain que la Directe satisfait & éclaire plus l'esprit que l'Indirecte. C'est pourquoy on ne doit se servir de celle-cy que quand on ne peut pas faire autrement. Euclide s'est servy dans plusieurs

fieurs Propositions des Démonstrations Indirectes, mais nous tâcherons de les rendre Directes autant qu'il nous sera possible.

Le SCOLIE est une remarque qu'on fait sur la construction d'un Problême, ou sur la démonstration d'un Theorême. Comme si aprés avoir trouvé la resolution d'un Problême, on remarque plusieurs cas où la resolution peut être plus courte par des abregez que l'on tire de la resolution générale : Ou bien si aprés avoir démontré un Theorême par la *Synthese*, on remarque que la Démonstration se peut aussi faire par *l'Analyse*. Mais il nous faut expliquer ce que c'est que *Synthese*, & qu'*Analyse*.

La SYNTHESE, ou *Composition*, est l'art de rechercher la verité d'une Proposition, par des consequences tirées avec ordre des Principes établis, ou par des Propositions qui se démontrent l'une par l'autre, en commençant par les plus simples pour passer aux plus composées, sans qu'il y en ait aucune inutile, jusqu'à ce que l'on soit venu à la derniere, qui acheve de convaincre l'esprit de la verité qu'on cherche, & l'obliger à y donner son consentement : de sorte que celuy qui aura consideré avec attention la suite de toutes ces Propositions, en sera convaincu invinciblement, & ne pourra plus refuser de consentir à cette derniere verité, dont auparavant il étoit en doute, ou qu'il ignoroit absolument.

L'ANALYSE, ou *Resolution* est l'art de découvrir la verité d'une Proposition par un ordre contraire à celuy de la Composition, sçavoir en supposant la Proposition telle qu'elle est, & en examinant ce qui s'ensuit de cette supposition, jusqu'à ce que l'on soit venu à quelque verité claire, dont ce qui a été proposé soit une suite necessaire, pour conclure de là la verité de la Proposition, en se servant de la composition par un ordre retrograde, sçavoir en reprenant ses raisonnemens par où l'on a finy. Vous avez un exemple de la Synthese & de l'Analyse dans le *Theorême* 3. *Part.* 3. *Chap.* 1. *Geom.*

L'Analyse consiste plus dans le jugement & dans l'addresse de l'esprit que dans les regles particulieres, lorsque l'on s'en sert par la pure Geometrie, comme faisoient les Anciens : Mais à present on s'en sert par *l'Algebre*, qui est une Arithmetique litterale, par le moyen de laquelle on decouvre bien plus facilement, & avec plus de methode, les veritez cachées. Voicy comment en parle M. Prestet dans ses *Nouveaux Elemens des Mathematiques*.

Jamais la Synthese des Geometres n'auroit pû s'élever à « un si haut point qu'elle l'a fait dans ce siecle, si l'Analyse des Modernes ne l'avoit soûtenuë, & n'avoit exposé « au

„ au jour une infinité de belles découvertes inconnuës aux
„ plus Sçavans hommes de l'antiquité. En effet il est im-
„ possible de raisonner d'une maniere qui soit tout ensem-
„ ble plus ingenieuse, plus methodique, plus profonde ou
„ sçavante, & plus abregée. Ses expressions des lettres qui
„ servent à son usage, sont tout à fait simples & familie-
„ res, & on ne peut rien fournir à l'esprit qui luy soit d'un
„ si grand secours pour découvrir ses veritez, parce qu'elles
„ diminuent son travail, & ménagent adroitement son ap-
„ plication. Elles le fixent, & le rendent attentif sur l'ob-
„ jet de ses recherches, elles luy en marquent commodé-
„ ment toutes les parties, elles soûtiennent l'imagination,
„ elles renouvellent & épargnent ou ménagent la memoire
„ autant qu'il est possible ; en un mot elles reglent & con-
„ duisent parfaitement l'esprit, & le partagent ou l'occu-
„ pent neanmoins si peu par les sens, qu'elles luy laissent
„ une liberté entiere d'employer dans ses recherches tout ce
„ qu'il a de vigueur & d'activité. De sorte que rien ne peut
„ échapper à sa vuë, & la justesse ou la netteté de ses rai-
„ sonnemens luy découvre d'ordinaire par la plus courte
„ voye les veritez dont il tente la recherche, ou les milieux
„ qui luy manquent pour y arriver, lorsqu'elles passent sa
„ portée.

Toutes ces raisons & plusieurs autres m'ont fait croire, que puisqu'à present l'Algebre est plus estimée & plus cultivée que jamais, il étoit à propos avant toute autre chose, d'ajoûter icy pour les commençans un Abregé de cette belle Science, autant seulement que nous en pouvons avoir besoin dans les Elemens d'Euclide & ailleurs, pour adoucir les démonstrations qui sembleront plus difficiles par une autre voye que par l'Analyse des Geometres : & d'ajoûter ensuite quelques Problêmes de Geometrie, que nous resoudrons avec le compas & la regle sur le papier, & avec le piquet & le cordeau ou la chaîne sur le terrain, par des pratiques simples & faciles sans aucunes démonstrations, pour dégrossir la main de ceux qui ne se sont jamais servy de ces instrumens, & pour les disposer à mieux entendre les Elemens d'Euclide, & les autres Traitez qui les doivent suivre.

ABRE-



ABREGE'
D'ALGEBRE.

L'*Algebre* est une Science par le moyen de laquelle on tâche à resoudre un Problême possible dans les Mathematiques, ce qui se fait au moyen d'une sorte d'Arithmetique litterale, laquelle à cause de cela a été appellée *Logistique specieuse*, ou simplement *Specieuse*, parce que ses raisonnemens se pratiquent par les especes ou formes des choses, sçavoir par les lettres de l'Alphabet, ce qui soulage extrémement la memoire & l'imagination de ceux qui s'appliquent à cette belle Science: car sans cela il faudroit retenir dans son esprit toutes les choses qui servent pour découvrir la verité qu'on cherche, ce qui demande une forte imagination, & ne se peut faire que par un grand travail de la memoire.

Ces lettres representent chacune en particulier des *Lignes* ou des *Nombres*, selon que le Problême est proposé touchant la *Geometrie*, ou l'*Arithmetique*: & étant jointes ensemble, elles representent des *Plans*, des *Solides*, & des *Puissances* plus élevées, selon leur nombre; car s'il y a deux lettres ensemble, comme *ab*, elles representent un *Rectangle*, dont les deux dimensions sont representées par les lettres *a*, *b*, sçavoir un côté par la lettre *a*, & l'autre côté par l'autre lettre *b*, afin qu'étant multipliées ensemble, elles produisent le *Plan ab*. De sorte que s'il y a deux lettres semblables, comme *aa*, ce Plan *aa* sera un *Quarré*, dont le côté est *a*, qu'on appelle *Racine quarrée*.

Mais s'il y a trois lettres ensemble, comme *abc*, elles representeront un *Solide*, sçavoir un *Parallelepipede rectangle*, dont les trois dimensions seront exprimées par les lettres *a*, *b*, *c*, sçavoir la longueur par une lettre *a*, la largeur par une autre lettre *b*, & la hauteur ou profondeur par la derniere lettre *c*, afin que ces trois lettres étant multipliées ensemble elles produisent le *Solide abc*. De sorte que si ces trois lettres sont les mêmes, comme *aaa*, ce solide *aaa* repre-

representera un *Cube*, dont le côté est *a*, qu'on appelle *Racine cubique*.

Enfin s'il y a plus de trois lettres ensemble, elles representeront une Puissance plus élevée, & d'autant de dimensions qu'il y aura de lettres : & de semblables Puissances sont appellées *Imaginaires*, parce que dans la nature on ne connoît point de quantité sensible, qui ait plus de trois dimensions. Cette Puissance, ou grandeur imaginaire est appellée *Plan-plan*, ou *Puissance de quatre dimensions*, quand elle est exprimée par quatre lettres, comme *abcd*, & quand ces quatre lettres sont semblables, comme *aaaa*, ce Plan-plan *aaaa* se nomme *Quarré-quarré*, dont le côté est *a*, qu'on appelle *Racine quarré-quarrée*.

Cette même Puissance est appellée *Plan-solide*, quand elle est representée par cinq lettres : & lorsqu'elles sont semblables, comme *aaaaa*, on le nomme *Sursolide*, dont le côté est *a*, qu'on appelle *Racine sursolide*.

Ainsi vous voyez que ces Puissances vont toûjours croissant par une continuelle addition de lettres, qui est équivalente à une multiplication continuelle : & quand elles sont composées de lettres égales, elles sont dites *Regulieres*, & Viete les appelle *Grandeurs scalaires*, parce qu'elles croissent & montent par un degré conforme au nombre de leurs lettres. Ainsi on connoît que *aa* est une *Puissance du second degré*, parce qu'elle a deux lettres ; & que *aaa* est une *Puissance du troisiéme dégré*, parce qu'elle a trois lettres, & ainsi ensuite. D'où il suit que la *Racine*, ou le *côté* commun *a* de toutes ces Puissances, est une *Puissance du premier degré*.

Mais comme en augmentant ces grandeurs scalaires par une continuelle addition d'une même lettre, le nombre des lettres pourroit devenir si grand, qu'il seroit difficile de les compter, & même de les écrire sur le papier, il suffira d'écrire seulement la Racine, c'est à dire une seule lettre, & de luy ajoûter vers la droite un chifre égal au nombre des lettres, dont la Puissance qu'on veut exprimer est composée, & alors ce nombre est appellé *Exposant* de la même Puissance, & montre le nombre de ses dimensions. On l'écrit ordinairement un peu plus haut que les lettres, pour ne le pas confondre avec les autres nombres quand il y en a, ou quand il y a quelque autre lettre qui suit aprés à la droite. Comme pour exprimer un *Sursolide*, ou une *Puissance du cinquiéme degré*, c'est à dire de cinq dimensions, dont le côté ou la Racine soit *a*, au lieu de le representer par ces cinq lettres *aaaaa*, on la pourra representer ainsi, a^5. De même pour exprimer le cube de *a*, on pourra écrire ainsi, a^3, & pour en exprimer le quarré-quarré, on écrira de la sorte a^4. Ainsi des autres.

On

On void aisément par ce que nous venons de dire, que les Grandeurs scalaires, ou les Puissances de quelque Racine, comme de a, ont cette suite naturelle,

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, \&c.$$

& qu'elles sont dans une Progression geometrique, cependant que leurs Exposans sont dans une Progression arithmetique, parce que les Puissances croissent par une multiplication continuelle d'une même Racine, & que leurs Exposans s'augmentent par une continuelle addition de celuy de la même Racine, lequel vaut 1, que l'on n'écrit pas, parce qu'il est sous-entendu, car il est évident que a vaut autant que a^1.

Ainsi mettant pour a, tel nombre qu'on voudra, par exemple 2, on connoîtra que a^2 vaudra 4, que a^3 vaudra 8, & que les autres Puissances seront telles que vous les voyez icy, qui montrent que les Puissances, ou grandeurs scalaires 2, 4, 8, &c.

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, \&c.$$
$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \&c.$$

sont dans une Progression geometrique, & que leurs Exposans 1, 2, 3, &c. sont dans une Progression arithmetique. Ce qui fait que ces Exposans peuvent être considerez comme les Logarithmes de leurs Puissances. D'où il suit que l'Exposant d'une Puissance qui est produite par la multiplication de deux autres Puissances, est égal à la somme des Exposans de ces deux mêmes Puissances. Ainsi l'on void que le Sursolide 32 a 5 pour Exposant, sçavoir la somme des Exposans 1, 4, des Puissances 2, 16, qui le produisent, ou des Exposans 2, 3, des Puissances 4, 8, qui le produisent.

Ainsi vous voyez qu'il y a bien de la difference entre $3a$ & a^3. parce que a^3, signifie le cube de la Racine a, & que $3a$ represente le triple de cette Racine: tellement que si a vaut 2, son cube a^3 vaudra 8, & son triple $3a$ vaudra seulement 6. Pareillement $3a^4$ exprime le triple du Quarré-quarré de la Racine a, de sorte que si a vaut 2, le Plan-plan $3a^4$ vaudra 48. Ainsi des autres.

CHAPITRE I.

DES MONOMES.

Nous appellons *Monome* une quantité litterale qui est seule, c'est à dire qui n'est point accompagnée de quelqu'autre grandeur jointe par ce caractere $+$, qui signifie *Plus*, ou par celuy-cy $-$, qui signifie *Moins*.

PROBLEME I.

Ajoûter une grandeur à une grandeur.

COmme les grandeurs homogénes n'affectent pas les heterogénes, c'est à dire qu'une grandeur ne peut pas augmenter une autre grandeur d'un genre different, lorsqu'elle luy est ajoûtée, ni la diminuer lorsqu'elle en est ôtée; il s'ensuit que celles qu'on veut ajoûter ensemble, doivent être *Homogénes*, c'est à dire de même genre: & alors quand elles seront de même espece, on ajoûtera les unitez aux unitez, & l'on retiendra les mêmes lettres, & les mêmes Exposans, & quand elles seront de diverse espece, on les pourra ajoûter par le signe +, parce que le *Plus*, aussi-bien que le *Moins*, ne fait pas divers genres. Cette addition sera facile à comprendre par les exemples suivans, où vous voyez que par l'addition de plusieurs grandeurs de même

$2a$	$2a^3$	$2\,abb$	$2a$	$2\,aab$
$4a$	$4a^3$	$4\,abb$	$3b$	$3\,abb$
$3a$	$8a^3$	$10\,abb$	$2a+3b$	$4a^3$
$9a$	$14a^3$	$16\,abb$		$2\,aab + 3\,abb + 4a^3$

espece, il ne se fait qu'une seule grandeur, laquelle par consequent est aussi un Monome: & que par l'addition de plusieurs grandeurs de differente espece, il se forme un *Polynome*, que nous appellerons *Binome*, quand il sera composé de deux Monomes, qu'on appelle *Termes*, comme $2a + 3b$: & *Trinome*, quand il sera composé de trois Monomes ou Termes, comme $2\,aab + 3\,abb + 4a^3$, &c.

PROBLEME II.

Oster une grandeur d'une grandeur.

LA Soustraction suppose aussi les grandeurs homogénes, car il est évident qu'on ne peut pas diminuer un Plan par la soustraction d'une ligne, parce qu'un Plan est composé d'une infinité de lignes: ni un solide par la soustraction d'une ligne, ou d'un plan, parce qu'un solide est composé d'une infinité de lignes, & aussi d'une infinité de Plans.

Comme nous avons dit que le *Moins* ne fait pas divers genres, on ôtera une grandeur d'une autre quantité plus grande & de même espece, en ôtant ses unitez de celles de la

plus grande & en retenant les mêmes lettres, & leurs mêmes Exposans : & d'une autre quantité plus grande & de differente espece, en l'écrivant aprés la plus grande vers la droite, & en ajoûtant entre les deux le caractere —, qui s'attribuë à la grandeur qu'on veut ôter, laquelle dans ce cas est appellée *Grandeur niée*, ou *Grandeur negative*, ou *Grandeur fausse*, quoy qu'elle soit veritable & positive en elle-même, n'étant fausse que par rapport à celle dont on la veut ôter. Voyez les exemples suivans.

$6a$	$8aa$	$12abb$	$3a$	$2a^3$
$2a$	$3aa$	$4abb$	$2b$	$2aab$
$4a$	$5aa$	$8abb$	$3a - 2b$	$2a^3 - 2aab$

Il arrive souvent qu'il faut ôter une quantité plus grande d'une plus petite, ce qui étant absolument impossible, on ostera la moindre de la plus grande, comme il vient d'être enseigné, & l'on ajoûtera au reste vers la gauche le caractere —, pour faire connoître que ce reste est provenu par la soustraction d'une plus grande quantité d'une plus petite, & que par consequent il est *moindre que rien*, c'est à dire une grandeur fausse. Ainsi ôtant $5a$ de $2a$, le reste sera $-3a$, & ôtant $10bb$ de $3bb$, il restera $-7bb$. Ainsi des autres.

Pour representer l'excez d'une grandeur sur une autre grandeur de differente espece, sans connoître la plus grande, comme l'on ne sçait pas à laquelle de ces deux grandeurs on doit attribuer le caractere —, on les joindra par celuy-cy ..., qui signifie *Difference*. Ainsi on connoîtra que la difference de ces deux grandeurs, $2a$, $3b$, est $2a \ldots 3b$, ou $3b \ldots 2a$, & que la difference de ces deux $2a^3$, $4abb$, est $2a^3 \ldots 4abb$, ou $4abb \ldots 2a^3$.

PROBLEME III.

Multiplier une grandeur par une grandeur.

LA Multiplication, aussi-bien que la Division, ne demande pas que les grandeurs soient homogénes, car rien n'empêche de multiplier un Plan par une Ligne, & il viendra un Solide : ou un Solide par une Ligne, & il viendra un Plan-plan. Ainsi vous voyez que la Multiplication des grandeurs change le genre, & l'éleve, excepté quand elle se fait par un nombre, auquel cas le même genre demeure.

Premierement pour multiplier une grandeur litterale par un nombre, on multipliera les unitez de cette grandeur litterale par ce nombre, & l'on retiendra les mêmes lettres & leurs Expo-

Exposans. Ainsi pour multiplier cette grandeur litterale 3 aabb par 4, on multipliera 3 par 4, & l'on aura 12 aabb pour le produit de la Multiplication.

Mais pour multiplier une grandeur litterale par une autre grandeur litterale, on multipliera ensemble les unitez qui sont à la gauche, & l'on ajoûtera ensemble les Exposans si les lettres sont les mêmes dans chacune des deux grandeurs qui se multiplient, autrement on écrira auprés du produit des unitez vers la droite les lettres tout de suite avec leurs Exposans, comme vous voyez dans les exemples suivans, où l'on voit que l'Exposant d'un Quarré est double de celuy de sa

$2a$	$2aa$	$3a$	$9aa$	$18aabc$
$3b$	$4aa$	$3a$	$3a$	$4aacd$
$6ab$	$8a^4$	$9aa$	$27a^3$	$72a^4bccd$

Racine, que l'Exposant d'un Cube est triple de celuy de sa Racine, & que l'Exposant d'un Quarré-quarré est quadruple de celuy de sa Racine.

PROBLEME IV.

Diviser une grandeur par une grandeur.

LA Division, que Viete appelle *Application*, ne demande pas, comme nous avons déja dit, que les grandeurs soient homogénes, car on divise souvent une grandeur *plus haute*, c'est à dire d'un genre plus élevé, ou qui a plus de dimensions, par une *plus basse*, c'est à dire d'un genre moins élevé, ou qui a moins de dimensions, comme un Plan par une Ligne, & alors il vient une Ligne: ou un Solide par une Ligne, & alors le quotient est un Plan. Ainsi des autres. Mais on ne sçauroit diviser une grandeur continuë par une autre grandeur continuë plus haute geometriquement parlant, parce que cela est contre la nature de la grandeur, mais on peut bien diviser une grandeur par une grandeur de même genre, & alors le Quotient est absolument un nombre, generalement parlant.

Premierement si le Diviseur est un nombre, on divisera les unitez qui sont à la gauche de la grandeur à diviser, par ce nombre, & on retiendra les mêmes lettres, & leurs Exposans. Ainsi divisant 8 abb, par 4, le Quotient sera 2 abb, & divisant $32a^3$ par 8, le Quotient sera $4a^3$.

Mais si au nombre qui sert de Diviseur il y a une ou plusieurs lettres, & que ces mêmes lettres se rencontrent dans la grandeur à diviser, que je suppose plus élevée que le

le Diviseur, on divisera les unitez de la grandeur à diviser, par celles du Diviseur, & on ôtera les Exposans des lettres du Diviseur des Exposans des lettres de la grandeur à diviser, & les lettres qui resteront sans Exposant, s'évanoüiront, & les autres demeureront au Quotient, qui sera en entiers, si le Diviseur n'a pas des lettres differentes de celles de la grandeur à diviser, ou si tous les Exposans du Diviseur se peuvent ôter des Exposans semblables de la grandeur à diviser, autrement ces lettres differentes demeureront au dessous, ou bien la difference des Exposans avec les mêmes lettres, laquelle se trouve en ôtant le plus petit du plus grand, comme vous voyez dans le dernier des exemples suivans.

$6a^3b^3$	$9a^3b^4$	$8aab^6$
$2ab$ ($3aabb$	$2ab$ ($\frac{9}{2}aab^3$	$4abc$ ($\frac{2ab^5}{c}$
O	O	O
$12a^5b^4$	$13a^4b^3$	$16aab^3cc$
$3abb$ ($4a^4bb$	$6abb$ ($\frac{13}{6}a^3b$	$8bbc^4$ ($\frac{2aab}{cc}$
O	O	O

PROBLEME V.

Tirer la Racine d'une grandeur donnée.

NOus avons remarqué dans la Multiplication, que l'Exposant d'un Quarré est double de celuy de sa Racine, que l'Exposant d'un Cube est triple de celuy de sa Racine, & ainsi en suite. C'est pourquoy pour tirer la racine quarrée d'une grandeur proposée, on prendra la Racine quarrée de ses Unitez, & la moitié de son Exposant : & pour en tirer la Racine cubique, on prendra la Racine cubique de ses Unitez, & le tiers de son Exposant. Ainsi on connoîtra que la Racine quarrée de cette Puissance $64a^6b^6$, est $8a^3b^3$, & que sa Racine cubique est $4aabb$, qui a encore sa Racine quarrée $2ab$. Ainsi des autres.

Une Puissance qui n'est precedée ni de +, ni de —, est censée *affirmée*, c'est à dire precedée d'un +, & alors elle aura toûjours la Racine qu'on cherche, pourvû qu'elle soit precedée d'un nombre qui ait telle Racine, & que son Exposant se puisse diviser exactement par celuy de la même Racine, sçavoir par 2, pour la Racine quarrée, par 3, pour la Racine cubique, & ainsi en suite. Ainsi on connoîtra que la Racine quarrée de $4a^8b^8$ est $2a^4b^4$, & que la Racine cubique

bique de a^6b^6 eſt *aabb*, l'unité étant ſous-entenduë dans la Racine auſſi-bien que dans la Puiſſance, car il eſt évident que a^6b^6, vaut autant que 1 a^6b^6, & ſa Racine cubique *aabb* autant que 1 *aabb*.

Si la Puiſſance dont il eſt propoſé de tirer la Racine eſt *Fauſſe*, c'eſt à dire precedée de —, elle n'aura jamais une telle Racine, bien qu'elle ſoit de la qualité que nous avons dit, à moins que l'Expoſant de la Racine qu'on cherche, ne ſoit un nombre impair, & alors la Racine ſera auſſi *Fauſſe*, c'eſt à dire precedée de —. Ainſi la Racine cubique de — 8 a^3b^3 eſt — 2 *ab*, & la Racine Surſolide — 32 $a^{10}b^5$, eſt — 2 *aab*. Mais — 4 *aabb* n'a point de Racine quarrée, & une ſemblable Racine eſt appellée *Imaginaire*, qu'on exprime ainſi, $\surd$— 4 *aabb*, le caractere $\surd$ ſignifiant *Racine*.

Quand une grandeur propoſée n'a point de Racine, on luy ajoûte vers la gauche le caractere $\surd$, avec l'Expoſant de la Racine, lequel on enferme dans un petit cercle pour ne le pas confondre avec les unitez de la puiſſance, ſçavoir ② pour la Racine quarrée, ③ pour la Racine cubique, &c. Ainſi pour exprimer la Racine cubique de 12 a^3b^3, on écrira ainſi, $\surd$ ③ 12 a^3b^3, & pour repreſenter la Racine quarrée de 24 *aabb*, on écrira de la ſorte, $\surd$ ② 24 *aabb*, ou ſimplement ainſi, $\surd$ 24 *aabb*, l'Expoſant ② étant ſous-entendu, que l'on neglige d'écrire, quand on veut repreſenter une Racine quarrée. Et telles Racines ſont appellées ordinairement *Quantitez Irrationnelles*.

On peut exprimer ces Racines, ou Quantitez irrationnelles, plus ſimplement, lorſque la Puiſſance eſt diviſible par une autre Puiſſance qui a la racine qu'on cherche, ſçavoir en écrivant le caractere $\surd$ entre la Racine de cette autre Puiſſance & le Quotient de la Diviſion. Ainſi pour exprimer la Racine cubique de cette Puiſſance 12 a^3b^3, au lieu d'écrire ainſi, $\surd$ ③ 12 a^3b^3, on écrira de la ſorte *ab* $\surd$ ③ 12 parce que la Puiſſance 12 a^3b^3 eſt diviſible par celle-cy, a^3b^3, qui a ſa Racine cubique *ab*, & que le Quotient eſt 12. Pareillement pour repreſenter la Racine quarrée de cette Puiſſance 6 *aabb*, au lieu d'écrire ainſi $\surd$ 6 *aabb*, on pourra écrire ainſi, *ab*$\surd$6, parce que la Puiſſance propoſée 6 *aabb* eſt diviſible par celle-cy, *aabb* dont la Racine quarrée eſt *ab*, & que le quotient eſt 6.

CHAPI-

CHAPITRE II.

DES POLYNOMES.

VOus avez vû dans le Chapitre precedent, que par l'addition & par la soustraction de plusieurs grandeurs de differente espece, il se forme un Polynome, dont les *Termes*, c'est à dire les Monomes qui le composent, peuvent estre diversement *Affectez*, c'est à dire affirmez ou niez, selon qu'ils seront provenus de l'addition ou de la soustraction : or comme la difference des + & des −, qu'on appelle *Signes*, peut causer de la difficulté, avant que de venir à la pratique, nous ajoûterons icy les Theorêmes suivans.

THEOREME I.

La somme de deux grandeurs semblablement affectées est de même affection.

C'Est à dire que si deux grandeurs quelconques sont *affirmées*, c'est à dire precedées de +, leur somme sera affirmée : & que si elles sont niées, leur somme sera aussi niée. Car il est évident que la somme $a+b$ des deux grandeurs a, b, ou $+a$, $+b$, qui sont *semblablement affectées*, c'est à dire precedées d'un même signe, qui fait connoître icy qu'elles sont toutes deux affirmées, est affirmée, parce que si elle étoit niée, de sorte qu'elle fût $-a-b$, chacune de ces deux grandeurs seroit aussi niée, ce qui est contre la supposition. Il est évident aussi que la somme $-a$, $-b$, des deux quantitez niées $-a$, $-b$, est niée, parce que si elle étoit affirmée, ensorte qu'elle fût $a+b$, chacune de ces deux quantitez seroit aussi affirmée, ce qui est encore contre la supposition. Ainsi on voit que + ajoûté avec +, fait +, & que − ajoûté à − fait −.

THEOREME II.

La somme de deux grandeurs inégales diversement affectées est de même affection que la plus grande, & elle est égale à leur difference.

CAr puisqu'elles sont diversement affectées, par la supposition, l'une doit être affirmée, & l'autre niée, & leur somme étant composée d'une grandeur niée & d'une affirmée, fait connoître que la grandeur niée doit être ôtée de l'affirmée, parce que la negation est une marque de soustraction. C'est pourquoy si la niée est moindre que l'affirmée, elle se pourra ôter de l'affirmée, & alors il restera une partie de l'affirmée, & par consequent une affirmation, c'est à dire que la difference sera affirmée, & ainsi de même affection que la plus grande. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit démontrer.

Mais si la grandeur niée est plus grande que l'affirmée; comme l'on ne peut pas ôter la niée de l'affirmée que l'on suppose moindre, on ôtera la moindre de la plus grande, c'est à dire l'affirmée de la niée, & il restera une partie de la niée, de sorte que la difference sera niée, & par consequent de même affection que la plus grande. Ce qui restoit à démontrer.

Ainsi on connoîtra que la somme de $-2a$ & de $+5a$ est $+3a$, & que la somme de $+2a$ & de $5a$ est $-3a$. D'où il suit que la somme de deux grandeurs égales diversement affectées est 0, ou rien.

THEOREME III.

Oster une grandeur d'une autre grandeur, est la même chose que d'ajoûter à cette autre grandeur la premiere affectée d'un signe contraire.

CAr si par exemple on veut ôter $+2a$ de $+5a$, c'est comme si à $+5a$ on vouloit ajoûter $-2a$, parce que la privation d'une affirmation est une restitution de negation, & la somme $+3a$ sera le reste de la soustraction.

De même si l'on veut ôter $-2a$ de $-5a$, c'est comme si à $-5a$ on vouloit ajoûter $+2a$, parce que la privation d'une negation est une restitution d'affirmation, & la somme $-3a$ sera le reste de la soustraction.

Mais

Mais voulant ôter $+3a$ de $-5a$, c'est comme si à $-5a$ on vouloit ajoûter $-2a$, & la somme $-7a$ sera le reste de la soustraction : & voulant ôter $-2a$ de $+5a$, c'est comme si à $+5a$ on vouloit ajoûter $+2a$, & la somme $+7a$ sera le reste de la soustraction.

THEOREME IV.

Le produit de deux grandeurs semblablement affectées est affirmé, & le produit de deux grandeurs diversement affectées est nié.

IL est déja bien évident que si les deux quantitez sont affirmées, leur produit sera affirmé, parce qu'en multipliant une grandeur affirmée par une autre grandeur affirmée, on l'ajoûte autant de fois qu'il y a d'unitez dans cette autre grandeur, car l'affirmation est une marque d'addition : & comme cette addition se fait d'une grandeur affirmée, la somme qui est le produit, sera aussi affirmée.

Il est évident aussi que si les deux quantitez qui se multiplient, sont niées, leur produit sera encore affirmé, parce qu'en multipliant une grandeur niée par une autre grandeur niée, on l'ôte autant de fois qu'il y a d'unitez dans cette autre grandeur niée, car la negation est une marque de soustraction : & comme cette soustraction se fait d'une grandeur niée, on détruit la negation, & par consequent on restituë l'affirmation, ce qui fait que ce reste, qui est le produit, est encore affirmé.

Enfin il est évident que si l'une des deux mêmes grandeurs est niée & l'autre affirmée, leur produit sera nié, parce qu'en multipliant la niée par l'affirmée, on l'ajoûte autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'affirmée : & comme cette addition se fait d'une negation, la somme ou le produit sera nié. De même en multipliant l'affirmée par la niée, on l'ôte autant de fois qu'il y a d'unitez dans la niée : & comme cette soustraction se fait d'une affirmation, en détruisant l'affirmation, on substituë la negation, ce qui fait que le reste ou le produit est nié.

Ainsi on voit que $+$ multiplié par $+$ fait $+$, que $-$ multiplié par $-$ fait $+$, & que $-$ multiplié par $+$, ou $+$ par $-$, fait $-$.

THEOREME V.

Le Quotient de deux grandeurs semblablement affectées est affirmé, & le Quotient de deux grandeurs diversement affectées est nié.

CE Theorême est évident par le precedent, parce que si le Quotient de deux grandeurs semblablement affectées n'étoit pas affirmé, comme en multipliant le Quotient par le Diviseur, on a la quantité qui a été divisée, le produit ne seroit pas de même affection que cette quantité. Il arriveroit le même inconvenient, si le Quotient de deux grandeurs diversement affectées n'étoit pas nié. Donc, &c.

PROBLEME I.

Addition des Polynomes.

AYant écrit les Polynomes les uns sous les autres par ordre, comme dans l'Arithmetique vulgaire, en sorte que les grandeurs de même espece, quand il y en aura, répondent les unes sous les autres, on ajoûtera les quantitez de même espece, comme il a été enseigné dans le Chapitre precedent, & l'on écrira celles de differente espece sous la ligne, chacune par ordre avec leurs mêmes signes de + & de —, comme vous voyez dans les exem-

$$\begin{array}{l} 3a^3b + 3a^4 - 6aabb - 7ab^3 \\ 7a^3b - 5a^4 + 3aabc - 4bbcc \\ \hline 10a^3b - 2a^4 - 6aabb + 3aabc - 7ab^3 - 4bbcc \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^3 & - 3aab \\ 4a^3 & + 3aab \\ \hline 5a^3 & \quad 0 \end{array}$$

ples suivans, où nous avons suivi les regles des + & des —, qui ont été enseignées aux *Theor.* 1. 2.

PRO-

PROBLEME II.

Soustraction des Polynomes.

POur ôter un Polynome d'un autre Polynome, il faut par *Theor.* 3. changer les signes + & — du Polynome qu'on veut ôter, en leurs contraires, c'est à dire, que des + il en faut faire des —, & que des — il en faut faire des +, aprés quoy on ajoûtera ce Polynome ainsi changé avec celuy duquel on veut faire la soustraction, par les preceptes du Problême precedent, car la somme sera par *Theor.* 3. le reste de la soustraction qu'il étoit proposé de faire, comme vous voyez dans les exemples suivans.

$$\begin{array}{l} 6aabb - 3a^3b + 4abbc \\ 2aabb - 5a^3b + 6abbc \\ \hline 4aabb + 2a^3b - 2abbc \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8ab + 2bb + 4cc \\ 2ab - 3bb - 2cc + 3cd \\ \hline 6ab + 5bb + 6cc - 3cd \end{array}$$

PROBLEME III.

Multiplication des Polynomes.

AYant mis le multiplicateur sous le Polynome à multiplier, comme dans l'Arithmetique vulgaire, on fera la multiplication du Polynome superieur par chaque terme de l'inferieur, selon les preceptes du Chapitre precedent, & selon les regles des + & des —, qui ont été enseignées au *Theor.* 4. aprés quoy on ajoûtera ensemble tous les produits, comme vous voyez dans les exemples suivans, dont le penultiéme montre que le Quarré du Binome $a+b$ est le Trinome $aa + 2ab + bb$, qui peut servir de modele pour l'extraction

$$\begin{array}{r} 2a + 4b \\ 2a + 2b \\ \hline + 4ab + 8bb \\ 4aa + 8ab \quad \\ \hline 4aa + 12ab + 8bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a + 3b \\ 2a - 3b \\ \hline - 6ab - 9bb \\ 4aa + 6ab \quad \\ \hline 4aa \quad 0 - 9bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2aa - 2bb \\
2aa - 2bb \\
\hline
-4aabb + 4b^4 \\
4a^4 - 4aabb \\
\hline
4a^4 - 8aabb + 4b^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
aa + 2ab + bb \\
2ab - bb \\
\hline
-aabb - 2ab^3 - b^4 \\
2a^3b + 4aabb + 2ab^3 \\
\hline
2a^3b + 3aabb \quad 0 \quad -b^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
a + b & \\
a + b & \text{côté} \\
\hline
+ ab + bb & \\
aa + ab & \\
\hline
aa + 2ab + bb & \text{quarré} \\
a + b & \text{côté} \\
\hline
+ aab + 2abb + b^3 & \\
a^3 + 2aab + abb & \\
\hline
a^3 + 3aab + 3abb + b^3 & \text{cube}
\end{array}$$

de la Racine quarrée, tant dans les grandeurs litterales que dans les nombres : & le dernier montre que le cube du même Binome $a+b$, eſt ce Quadrinome $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, qui peut pareillement ſervir de modele pour l'extraction de la Racine cubique, auſſi tant dans les grandeurs litterales que dans les nombres.

PROBLEME IV.

Diviſion des Polynomes.

PRemierement, pour diviſer un Polynome par un Monome, il faut diviſer chaque terme du Polynome l'un aprés l'autre par le Monome propoſé, ſuivant les preceptes du Chapitre precedent, & mettre les Quotiens à la droite, comme dans l'Arithmetique ordinaire, avec les ſignes de + & de —, conformes à la regle du *Theor.* 5. comme vous voyez dans les exemples ſuivans, qu'il ſuffit de regarder pour les comprendre.

$$\frac{8a^6}{2a} + \frac{4aabbcc}{2a} - \frac{3aab^4}{2a} \quad (4a^5 + 2abbcc - \tfrac{3}{2}ab^4.$$

o o o

$$\frac{9a^5}{-2a} - \frac{12a^3bb}{2a} - \frac{4bbc^3}{-2a} \quad (-\tfrac{9}{2}a^4 + 6aabb + \tfrac{2bbc^3}{a}$$

o o o

Mais si le Diviseur est un Polynome, on l'écrira sous le Polynome à diviser, comme dans la division ordinaire, & comme dans les deux exemples precedens, aprés quoy on commencera la division par la puissance la plus élevée à l'égard des lettres qui sont dans le Diviseur, & l'on achevera le reste comme dans l'Arithmetique vulgaire, & comme vous voyez dans les exemples suivans.

$$\begin{array}{l} 4aa + 12ab + 8bb \\ 2a + 2b \qquad (2a + 4b \\ \hline o \quad + 8ab + 8bb \\ \qquad 2a + 2b \\ \hline \qquad o \quad o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9aa - 6ab + bb \\ 3a - b \qquad (3a - b \\ \hline o \quad - 3ab + bb \\ \qquad 3a - b \\ \hline \qquad o \quad o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4abbc - 2abcx + 6bbcc + bccx - 2ccxx \\ 2bc - cx \qquad (2ab + 3bc + 2cx \\ \hline o \quad o + 6bbcc + bccx \\ \qquad 2bc - cx \\ \hline \qquad o + 4bccx - 2ccxx \\ \qquad\quad 2bc - cx \\ \hline \qquad\quad o \quad o \end{array}$$

Si aprés avoir multiplié le Diviseur par le Quotient, on ne

ne peut pas ôter le produit de dessus, à cause qu'on n'y trouve pas une grandeur de même espece, on écrira ce produit au dessous, en changeant son signe de + ou de — en son contraire; car ainsi la soustraction se trouvera faite, par *Theor.* 3. aprés quoy on continuëra la division jusqu'à ce que tous les termes ayent été divisez, comme vous voyez dans les exemples suivans.

$$4aa-9bb$$
$$2a+3b \qquad (2a-3b$$
$$0 \quad -6ab-9bb$$
$$2a+3b$$
$$0 \quad 0$$

$$2a^3b+3aabb-b^4$$
$$aa+2ab+bb \qquad (2ab-bb$$
$$0 \quad -aabb-2ab^3-b^4$$
$$aa+2ab+bb$$
$$0 \quad 0$$

$$a^3+b^3$$
$$a+b \qquad (aa-ab+bb$$
$$0-aab+b^3$$
$$a+b$$
$$+abb+b^3$$
$$a+b$$
$$0 \quad 0$$

$$a^3-b^3$$
$$a-b \qquad (aa+ab+bb$$
$$0+aab-b^3$$
$$a-b$$
$$+abb-b^3$$
$$a-b$$
$$0 \quad 0$$

Si à la fin de la Division il reste quelque chose, ou qu'on ne puisse pas faire la Division à cause de la difference des lettres dans le Diviseur & dans le Polynome à diviser, on fera de ces deux Polynomes une Fraction, en mettant le Diviseur au dessous du Polynome à diviser, avec une petite ligne entre-

entre-deux. Ainsi divisant $aa+bb$ par $a+b$, le quotient sera $\frac{aa+bb}{a+b}$, & divisant a^3+b^3 par $a-b$, le quotient sera $\frac{a^3+b^3}{a-b}$. Ainsi des autres.

PROBLEME V.

Tirer la Racine d'un Polynome.

Nous avons dit dans la Multiplication, que le Trinome $aa+2ab+bb$, dont la Racine quarrée est $a+b$, sert de modele pour la Racine quarrée: & pour vous le faire voir, cherchons-en la Racine quarrée, comme si nous ne la sçavions pas, ce qui se fera en cette sorte.

Parce que les termes aa & bb sont quarrez, on peut commencer par lequel on voudra de ces deux; si l'on commence par aa, on mettra sa Racine quarrée a, vers la droite en for-

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ a \qquad\qquad\quad (a+b \\ \hline 0+2ab+bb \\ \quad\;\; 2a+b \\ \hline \quad\;\; 0 \quad 0 \end{array}$$

me de Quotient, pour la premiere lettre de la Racine qu'on cherche, & aussi sous le quarré aa, afin qu'en multipliant a par a, on ait son quarré aa, lequel étant ôté du Trinome $aa+2ab+bb$, on mette le reste $2ab+bb$ au dessous de la ligne: & comme dans ce reste il demeure $2a$, comme l'on void au Plan $2ab$, cela fait connoître qu'il faut diviser ce Plan $2ab$ par $2a$, qui est le double de la premiere lettre trouvée a, & il viendra $+b$, pour la seconde figure de la Racine qu'on cherche; c'est pourquoy cette seconde lettre b sera mise à la droite avec son signe, $+$, aprés la premiere a, & aussi sous son quarré bb, qui est le dernier terme du reste $2ab+bb$, tellement que sous ce reste $2ab+bb$ il y aura $2a+b$ pour diviseur, & comme il ne reste rien aprés avoir multiplié & ôté, comme prescrit la regle de la Division, on conclura que la Racine quarrée du Trinome proposé $aa+2ab+bb$ est precisément $a+b$.

C'est de la même façon que l'on tirera la Racine quarrée de quelqu'autre Puissance, & il ne faut que regarder les exemples suivans pour l'entendre.

$$\begin{array}{l} a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \\ aa \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (aa + 2ab + bb \\ \hline 0 + 4a^3b + 6aabb \\ \quad 2aa + 2ab \\ \hline \quad 0 \quad 2aabb + 4ab^3 + b^4 \\ \qquad\quad 2aa + 4ab + bb. \\ \hline \qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9a^4 - 36a^3b + 72ab^3 + 36b^4 \\ 3aa \qquad\qquad\qquad\qquad (3aa - 6ab - 6bb. \\ \hline - 36a^3b + 72ab^3 \\ \quad 6aa - 6ab \\ \hline \qquad - 36aabb + 72ab^3 + 36b^4 \\ \qquad\quad 6aa - 12ab - 6bb \\ \hline \qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Si dans le second exemple on avoit commencé à tirer la Racine quarrée par le dernier terme $36b^4$, cette Racine quarrée se seroit trouvée telle, $6bb + 6ab - 3aa$, dont les signes + & — sont contraires à ceux de la premiere Racine trouvée $3aa - 6ab - 6bb$, ce qui fait voir qu'un Polynome a toûjours deux Racines quarrées, aussi-bien qu'un Monome, & toute autre Puissance : & nous dirons ici généralement qu'une grandeur a autant de Racines que l'Exposant de cette Racine comprend d'unitez.

Nous avons aussi dit au même endroit, c'est à dire au *Probl.* 3. que le Quadrinome $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, dont la Racine cubique est $a. + b$, sert de modéle pour la Racine cubique: & pareillement pour vous le faire voir, nous chercherons cette Racine cubique comme si nous ne la sçavions pas, en cette sorte.

Parce que les termes a^3 & b^3 sont cubiques, on peut commencer par lequel on voudra de ces deux ; si l'on commence par a^3, on mettra sa Racine cubique a vers la droite, comme auparavant, pour la premiere lettre de la Racine qu'on cherche, dont le cube a^3 doit être ôté du Polynome proposé, & le reste $3aab + 3abb + b^3$ doit être écrit au dessous de la ligne, pour le diviser par $3aa$, c'est à dire par le triple du quarré de la premiere lettre trouvée a, parce que dans le premier terme $3aab$ du reste $3aab + 3abb + b^3$, ce triple

se

$$
\begin{array}{llll}
a^3 + 3aab + 3abb + b^3 & & & (a+b \\
a^3 & & & \\
\hline
0 + 3aab + 3abb + b^3 & & & \\
\quad 3aa & & & \\
\hline
\quad 0 \quad + 3abb + b^3 & & & \\
\quad\quad - 3abb & & & \\
\hline
\quad\quad 0 \quad + b^3 & & & \\
\quad\quad\quad - b^3 & & & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 & & &
\end{array}
$$

se rencontre, & le quotient $+ b$ sera écrit vers la droite comme auparavant, pour la seconde lettre de la Racine qu'on cherche, & le reste de la division sera $3abb + b^3$, d'où il faut ôter $3abb$, & b^3, sçavoir le triple solide sous la premiere figure trouvée a & le quarré bb de la seconde b, & le cube de la même seconde: & comme il ne reste rien, cela fait connoître que la Racine cubique du Polynome proposé $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ est exactement $a + b$.

Si le Polynome proposé n'a pas une telle Racine qu'on demande, on exprimera cette Racine par le caractere $\surd$, que l'on mettra à côté du Polynome vers la gauche, avec une ligne au dessus du même Polynome, laquelle fait connoître que le caractere $\surd$ s'étend universellement sur tout le Polynome. Ainsi pour exprimer la Racine quarrée de ce Binome $aabb + aacc$, on écrira ainsi, $\surd\,\overline{aabb + aacc}$, ou bien ainsi, $a\surd\,\overline{bb + cc}$, parce que le Binome $aabb + aacc$ est divisible par le quarré aa, dont le côté est a, & que le Quotient est $bb + cc$. Pareillement pour exprimer la Racine cubique de ce Binome $a^3b^3 + a^3c^3$, on écrira ainsi, $\surd ③\,\overline{a^3b^3 + a^3c^3}$, ou bien ainsi, $a\surd ③\,\overline{b^3 + c^3}$, parce que le Binome $a^3b^3 + a^3c^3$ est divisible par le cube a^3, dont le côté est a, & que le Quotient est $b^3 + c^3$. Ainsi des autres.

CHAPITRE III.

DES EQUATIONS.

UNe *Equation* est la comparaison qui se fait entre deux grandeurs differentes, qu'on veut rendre égales, lesquelles pour cette fin on separe ordinairement par ce caractere $=$, qui signifie *égal*, mais nous le changerons en celuy-

luy-cy, ∽, qui nous ſemble plus propre, & plus naturel.

Ces deux grandeurs ſont appellées, *Membres de l'Equation*, leſquels ſont ordinairement compoſez de pluſieurs Monomes ou Termes, dont tous ceux qui ſont d'un même côté de l'Equation, c'eſt à dire dans un même membre, ſont conſiderez enſemble comme une ſeule grandeur.

Une Equation vient toûjours dans la reſolution analytique d'un Problême, & elle contient pour le moins une quantité inconnuë, que l'on exprime ordinairement par les dernieres lettres de l'Alphabet x, y, z, les connuës s'exprimant indifferemment par les autres lettres. Ainſi dans cette Equation, $xx + 2ax \backsim bc$, on connoît que l'inconnuë eſt x, ce qui fait que les deux termes xx, $2ax$, où elle ſe rencontre, ſont appellez *Termes inconnus*, que l'on place ordinairement dans un même Membre: & que le terme bc, où elle ne ſe rencontre pas, ſe nomme *Terme connu*, & auſſi *Dernier terme*, qui fait ordinairement l'autre Membre de l'Equation, pour le comparer avec l'inconnu, & c'eſt à cauſe de cela que Viete le nomme *Homogéne de comparaiſon*.

Entre tous les termes d'une Equation, on appelle *Premier*, celuy où la quantité inconnuë ſe trouve dans le plus haut degré: *Second*, celuy où la quantité inconnuë s'abaiſſe d'un degré au deſſous du plus haut: comme le *Troiſiéme* eſt celuy où la quantité inconnuë s'abaiſſe de deux degrez au deſſous du plus haut, & ainſi enſuite juſqu'au *Dernier Terme*. Comme dans cette Equation, $x^3 + axx - bbx \backsim acc$, le premier terme eſt x^3, le ſecond eſt axx, & le troiſiéme eſt bbx, le dernier étant acc.

Quoy que dans tous les termes d'une Equation, le degré de la quantité inconnuë ne s'abaiſſe pas également, à cauſe de quelque terme qui manque, ce qui arrive ſouvent, cela n'empêche pas que le terme où la quantité inconnuë eſt abaiſſée de deux degrez, par exemple, au deſſous du premier, quoy qu'il ſoit le ſecond en ordre, ne ſoit appellé troiſiéme. Ainſi dans l'Equation ſuivante $x^4 + aaxx + b^3x \backsim c^4$, où le ſecond terme manque, le premier terme eſt x^4, le troiſiéme eſt $aaxx$, le quatriéme eſt b^3x, & le dernier eſt c^4.

Tous les termes d'une Equation doivent être homogénes, pour le moins dans un Problême de Geometrie, & ceux où la quantité inconnuë ſe trouve également élevée, ou bien ceux où elle ne ſe rencontre pas, doivent paſſer pour un ſeul terme. Comme dans cette Equation, $xx + ax + bx \backsim ad + bd$, le premier terme eſt xx, le ſecond eſt $ax + bx$, & le dernier eſt $ad + bd$.

On dit qu'une Equation eſt d'autant de dimenſions que la quan-

quantité inconnuë en a dans le premier terme ; c'est à dire qu'on l'appelle *de deux dimensions*, ou *Quarrée*, si le quarré de la lettre inconnuë se trouve dans le premier terme : ou *de trois dimensions*, ou *Cubique*, si le cube de la même quantité inconnuë se rencontre dans le premier terme, &c. Ainsi on connoît que l'Equation suivante $x^3 - abx \backsim aab$, est de trois dimensions, ou cubique, parce que le cube de la quantité inconnuë x, se trouve dans le premier terme. Et lorsque dans l'Equation il n'y a qu'un seul terme inconnu, on la nomme *Equation Pure* : comme $x^3 \backsim abb$, ou $xx \backsim ab$, &c.

La quantité inconnuë d'une Equation peut avoir autant de valeurs differentes, ou bien égales, que l'Equation a de dimensions. Ainsi on connoît que dans cette Equation de deux dimensions, $xx + 2x \backsim 15$, il y a deux Racines, sçavoir $+ 3$, qui pour estre affirmée s'appelle *Racine veritable* : & $- 5$, qui est une Racine fausse, c'est à dire que l'on peut supposer $x \backsim 3$, ou $x \backsim -5$. Cela a besoin de démonstration, mais ce n'est pas icy le lieu d'en dire davantage. Voyez la *Geometrie de M. Descartes*.

Quand on a connu une des Racines d'une Equation qui dépend de quelque Problême, on a une resolution de ce Problême. Mais pour trouver cette Racine, l'Equation doit estre tellement reduite que le premier terme ne soit multiplié par aucun autre quantité que par l'unité, qui est toûjours sous-entenduë quand elle n'y est pas : ou pour le moins par une autre quantité, qui ait une Racine, dont l'Exposant soit égal au nombre des dimensions de l'Equation.

De plus, tous les termes inconnus doivent estre dans un même Membre de l'Equation, lequel à cause de cela est appellé *Membre inconnu*, & aussi *Premier Membre*, parce qu'il s'écrit le premier ordinairement à la gauche : & les connus dans l'autre Membre, qui se met ordinairement à la droite aprés le caractere $\backsim$.

Enfin on doit abaisser l'Equation autant que l'on pourra, c'est à dire que l'Equation doit estre tellement reduite, que la quantité inconnuë y ait le degré le plus bas qu'il sera possible, pour en pouvoir connoître plus facilement les Racines. Cette reduction se fera au moyen des Problêmes suivans.

PRO-

PROBLEME I.

*Réduire une Equation par l'*Antithese.

ON se sert de l'*Antithese* pour transporter les termes d'une Equation d'un membre à l'autre, quand ils n'ont pas la disposition qu'ils doivent avoir, qui est ordinairement telle que le premier terme soit mis le premier en ordre, & qu'il soit suivi immediatement par le second, s'il n'y manque pas, & que pareillement le second soit suivi par le troisiéme, & ainsi ensuite jusqu'au dernier terme.

Si le terme qu'on veut transporter d'un Membre à l'autre est affirmé, on l'ôtera de chaque côté, & on l'ajoûtera s'il est nié, car ainsi la transposition se trouvera faite, & pour cela l'Equation ne sera point troublée, suivant l'Axiome, qui nous apprend que, *si à des grandeurs égales on ajoûte ou on ôte des grandeurs égales, les sommes ou les differences seront égales.*

Comme si dans cette Equation, $x^3 - 3axx \backsim b^3 - bbx + 2axx$, on veut mettre tous les termes inconnus vers la gauche, c'est à dire dans le premier membre, on ajoûtera de chaque côté le terme bbx, qui est nié, & on ôtera le terme $2axx$ qui est affirmé, & l'Equation proposée $x^3 - 3axx \backsim b^3 - bbx + 2axx$, se changera en celle-cy, $x^3 - 5axx + bbx \backsim b^3$.

On tire de cette regle generale l'abregé suivant, pour faire passer tel terme que l'on voudra d'un membre à l'autre. *Effacez le terme que vous voulez transporter à l'autre membre, & l'y écrivez avec un signe contraire à celuy qu'il a dans le membre où il est.* C'est ainsi que l'Equation suivante $x^4 - aabb - aacc \backsim aaxx - c^3x$, se changera en celle-cy, $x^4 - aaxx + c^3x \backsim aacc - aabb$, ou bien en celle-cy, $x^4 - aaxx + c^3x + aabb - aacc \backsim 0$.

PROBLEME II.

Réduire une Equation par le Parabolisme.

IL ne suffit pas que par le moyen de l'Antithese on ait mis dans un membre tous les termes inconnus d'une Equation, pour en pouvoir connoître les Racines : mais il faut encore que le premier terme ait une Racine conforme au nombre des dimensions de l'Equation, sçavoir une Racine quarrée, si l'Equation est de deux dimensions, une Racine cubique si l'Equation est de trois dimensions, & ainsi ensuite.

Pour

Pour cette fin, il n'y a qu'à reduire le premier terme à l'unité, s'il se trouve multiplié par quelqu'autre quantité que l'unité, ce qui se peut faire par le *Parabolisme*, sçavoir en divisant chaque membre de l'Equation par cette quantité connuë, qui multiplie le premier terme, & pour cela l'Equation ne sera point alterée, par l'Axiome qui nous apprend que *si l'on divise des quantitez égales par une même quantité, les Quotiens seront égaux.*

Comme si dans cette Equation, $axx + 2abx \backsim bcc$, on divise chaque membre par a, qui multiplie le premier terme axx, on aura cette autre Equation, $xx + 2bx \backsim \frac{bcc}{a}$: & pareillement si l'on divise cette autre Equation $abx^3 + aabbx \backsim c^3dd$, par la quantité connuë ab, qui multiplie le premier terme abx^3, on aura cette autre Equation, $x^3 + abx \backsim \frac{c^3dd}{ab}$. Ainsi des autres.

PROBLEME III.

Réduire une Equation par l'Isomerie.

ON se sert de l'*Isomerie*, pour délivrer une Equation de fractions, qui sont toûjours incommodes dans le calcul. Pour les faire évanoüir, on multipliera premierement l'Equation proposée par le dénominateur de la fraction que l'on veut détruire, & l'Equation qui viendra, sera pareillement multipliée par le dénominateur d'une autre fraction, s'il y en a encore une, & ainsi ensuite.

Proposons cette Equation $\frac{1}{4}x^3 + axx - \frac{bccx}{a} \backsim abb$, & la multiplions par le dénominateur 4 de la fraction $\frac{1}{4}x^3$, & nous aurons cette autre Equation, $x^3 + 4axx - \frac{4bccx}{a} \backsim 4abb$, laquelle estant multipliée par le dénominateur a de l'autre fraction $\frac{4bccx}{a}$, on aura cette derniere Equation sans fractions, $ax^3 + 4aaxx - 4bccx \backsim 4aabb$.

On auroit pû, pour avoir plûtôt fait, multiplier l'Equation proposée $\frac{1}{4}x^3 + axx - \frac{bccx}{a} \backsim abb$, par le produit $4a$ des dénominateurs 4 & a, des fractions $\frac{1}{4}x^3$, $\frac{bccx}{a}$, pour avoir tout d'un coup cette autre Equation sans fractions, $ax^3 + 4aaxx - 4bccx \backsim 4aabb$, comme auparavant.

PRO-

PROBLEME IV.

Réduire une Equation par l'Hypobibasme.

L'*Hypobibasme* est un égal abaissement de tous les degrez de la quantité inconnuë d'une Equation, lorsque cette quantité inconnuë se trouve dans tous les termes: & cet abaissement se fait en ôtant le plus petit Exposant de la quantité inconnuë, qui se rencontrent dans le dernier de tous les termes, de tous les Exposans de la même quantité inconnuë, qui se rencontrent dans tous les termes de l'Equation, ce qui diminuë le nombre de ses dimensions. Ainsi l'Equation $x^4 + 2ax^3 \backsim bbxx$, qui semble estre de quatre dimensions, se réduit à celle-cy, $xx + 2ax \backsim bb$, qui n'est que de deux dimensions: & la suivante $x^4 - aaxx \backsim c^3x$, qui semble aussi avoir quatre dimensions, se réduit à celle-cy, $x^3 - aax \backsim c^3$; qui n'en a que trois. Ainsi des autres.

PROBLEME V.

Réduire une Equation par la Multiplication.

POur éviter les fractions, qui naissent ordinairement de la division, lorsque l'on veut que le premier terme d'une Equation ait une Racine, dont l'Exposant soit égal au nombre de ses dimensions; servez-vous de la Multiplication, & multipliez chaque membre de l'Equation par la quantité connuë du premier terme, si l'Equation est quarrée: ou par le quarré de la même quantité, si l'Equation est cubique, & ainsi ensuite, ce qui ne troublera point l'Equation par l'Axiome qui nous apprend que *si l'on multiplie des quantitez égales par une même quantité, les produits seront égaux*; & l'Equation proposée se trouvera réduite à une autre, dont le premier terme aura une Racine telle, qu'on la demande.

Comme pour rendre quarrée le premier terme de cette Equation quarrée $axx + bcx \backsim bbd$, on la multipliera par la quantité connuë a du premier terme axx, & il viendra cette autre Equation, $aaxx + abcx \backsim abbd$, dont le premier terme $aaxx$, a sa Racine quarrée ax. De même pour rendre cubique le premier terme de cette Equation cubique $ax^3 + bcxx - bbcx \backsim c^4$, on la multipliera par le quarré aa de la quantité connuë a du premier terme ax^3, & l'on aura cette autre Equation, $a^3x^3 + aabcxx - aabbcx \backsim aac^4$, dont le premier terme a^3x^3, a sa Racine cubique ax. Ainsi des autres.

On

On peut travailler quelquefois par abregé, car il importe peu par quelle grandeur on multiplie l'Equation proposée, pourvû que le premier terme ait la Racine qu'on demande. Ainsi dans cette Equation, $aax^3 + abcxx \backsim abc^3$, si l'on veut que le premier terme devienne cubique, il suffira de multiplier l'Equation par a, car il viendra cette autre Equation, $a^3x^3 + aabcxx \backsim aabc^3$, dont le premier terme a^3x^3 est cubique.

PROBLEME VI.

Réduire une Equation par la Division.

ON peut aussi par la division faire que le premier terme d'une Equation ait une Racine conforme au nombre de ses dimensions, sçavoir en la réduisant par le Parabolisme; comme vous avez vû au *Probl.* 2. sans qu'il soit besoin de le repeter davantage.

Mais on peut aussi s'en servir quelquefois pour abaisser une Equation, sçavoir quand cette Equation est divisible par un Binome composé de la quantité inconnuë & d'une partie aliquote du dernier terme, laquelle dans ce cas sera une des Racines de l'Equation proposée, sçavoir la Racine veritable, si dans le diviseur elle est niée, & la fausse si elle est affirmée. Cela suppose que l'Equation soit tellement réduite par l'Antithese, que tous ses termes soient dans un même membre, en sorte qu'il y ait 0 dans l'autre.

Ainsi en divisant cette Equation de trois dimensions $x^3 - bxx - axx - 2abx - aab \backsim 0$, par $x - a$, il vient cette Equation de deux dimensions $xx + ax - bx - ab \backsim 0$. Nous avons plusieurs manieres differentes & demonstratives pour trouver un semblable diviseur, que nous expliquerons dans quelqu'autre occasion.

PROBLEME VII.

Réduire une Equation par l'extraction de Racines.

UNe Equation se peut encore abaisser en prenant la Racine quarrée ou cubique de chaque membre, lorsque cela est possible. Pour cette fin il suffit que le membre inconnu de l'Equation ait la Racine qu'on demande, car il importe peu que le membre connu, c'est à dire le dernier terme, ait une telle Racine ou non, parce qu'estant connu on le peut toûjours exprimer en Geometrie par l'invention de quelques Moyennes proportionnelles, quand il est irrationnel.

Ainsi pour abaisser cette Equation, $xx + 2ax + aa \backsim bc$,

on prendra la Racine quarrée de chaque membre, & il viendra cette Equation plus basse, $x + a \propto \sqrt{bc}$, ou $x + a \propto d$, en supposant que la quantité d est moyenne proportionnelle entre les deux b, c, auquel cas on aura $bc \propto dd$.

De même pour abaisser l'Equation suivante, $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 \propto b^3$, on prendra la Racine cubique de chaque membre, pour avoir cette Equation plus basse, $x + a \propto b$, dans laquelle on trouvera par l'Antithese, $x \propto b - a$, pour l'une des trois Racines de l'Equation proposée.

Si le membre inconnu de l'Equation proposée n'a pas une Racine telle qu'on la demande, en sorte qu'il reste quelque chose, & que ce reste soit connu, on l'ajoûtera à chaque membre s'il est nié, ou bien on l'ôtera s'il est affirmé, & alors l'Equation pourra estre abaissée.

Comme dans cette Equation, $x^3 + 6axx + 12aax \propto abb$, en prenant la Racine cubique du membre inconnu $x^3 + 6axx + 12aax$, il reste $-8a^3$. C'est pourquoy on ajoûtera $8a^3$ à chaque membre de l'Equation, & l'on aura cette autre Equation, $x^3 + 6axx + 12aax + 8a^3 \propto abb + 8a^3$, où prenant la Racine cubique de chaque membre, on a cette Equation plus basse, $x + a \propto \sqrt[3]{abb + 8a^3}$.

De même parce qu'en prenant la Racine quarrée du membre inconnu de cette Equation, $x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2bbxx + 2abbx \propto 3b^4$, il reste $-b^4$, on ajoûtera b^4 à chaque membre, pour avoir cette autre Equation, $x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2bbxx + 2abbx + b^4 \propto 4b^4$, où prenant la Racine quarrée de chaque membre, on aura cette Equation plus basse, $xx \ldots xx \ldots bb \propto 2bb$

Quand tous les termes de l'Equation sont dans un seul membre, en sorte qu'il y ait o dans l'autre, il n'est pas necessaire que ce qui restera de l'extraction de la Racine qu'on demande soit connu, & il suffit qu'il ait une semblable Racine, parce qu'estant ajoûté à chaque membre de l'Equation, on aura une autre Equation qui se pourra abaisser.

Comme dans cette Equation, $9aabb - 24aabx + 12aaxx - 18abxx + 12ax^3 \propto 0$, en prenant la Racine quarrée du membre inconnu, il reste $-4aaxx - 12ax^3 - 9x^4$, ce qui fait connoître qu'il faut ajoûter $4aaxx + 12ax^3 + 9x^4$, qui a sa Racine quarrée à chaque membre, pour avoir cette autre Equation, $9aabb - 24aabx + 16aaxx - 18abxx + 24ax^3 + 9x^4 \propto 4aaxx + 12ax^3 + 9x^4$, dont la Racine quarrée donne cette Equation plus basse, $3ab \ldots 4ax \ldots 3xx \propto 2ax + 3xx$.

Cette methode se peut appliquer à toutes les Equations quarrées, comme vous voyez dans celle-cy, $xx - 4ax \propto bb$, où prenant la Racine quarrée du membre inconnu $xx - 4ax$, il

il reste $-4aa$: car si l'on ajoûte $4aa$ à chaque membre, on aura cette autre Equation, $xx-4ax+4aa \backsim bb+4aa$, dont la Racine quarrée donne cette Equation plus basse, $x \ldots 2a \backsim \sqrt{bb+4aa}$, dans laquelle on trouvera par l'Antithese, $x \backsim 2a+\sqrt{bb+4aa}$ pour la Racine veritable, ou $x \backsim 2a-\sqrt{bb+4aa}$ pour la Racine fausse de l'Equation proposée $xx-4ax \backsim bb$.

Comme ce qui reste aprés l'extraction de la Racine quarrée est toûjours égal au quarré de la moitié de la quantité connuë du second terme, on peut abaisser une Equation de deux dimensions par cet abregé.

Ajoûtez le quarré de la moitié de la quantité connuë du second terme à chaque membre de l'Equation, pour avoir une autre Equation, qui se pourra abaisser par la Racine quarrée.

Proposons par exemple cette Equation quarrée, $xx+6ax \backsim bb$, & luy ajoûtons le quarré $9aa$ de la moitié $3a$ de la quantité connuë $6a$ du second terme $6ax$, pour avoir cette autre Equation, $xx+6ax+9aa \backsim bb+9aa$, où prenant la Racine quarrée de chaque membre, on a cette Equation plus basse $x+3a \backsim \sqrt{bb+9aa}$.

On peut aussi appliquer cette methode aux Equations plus élevées, où il n'y a que deux termes inconnus, tels que le plus grand Exposant de la quantité inconnuë soit double du plus petit, parce qu'une semblable Equation est dérivative d'une Equation de deux dimensions, lorsquelle est quarrée-quarrée: une *Equation dérivative* en general étant celle où les Exposans de la lettre inconnuë ont une commune mesure plus grande que l'unité: comme $x^4+abxx \backsim bbcc$; ou $x^6-2aabx^3 \backsim aab^3c$, &c.

Ainsi vous avez une regle generale pour connoître par le calcul les Racines d'une Equation de deux dimensions, & de ses dérivatives; ce qui suffit pour le present. Si vous en voulez davantage; voyez la Methode generale que nous avons enseignée dans nostre *Traité des Lignes du premier genre*, pour trouver par le calcul les Racines des Equations de deux & de trois dimensions.

La même methode se peut encore appliquer aux Equations de trois & de quatre dimensions, qui peuvent estre abaissées en ôtant le second terme, dont la pratique est beaucoup plus longue & plus laborieuse que par l'extraction de Racines, comme nous pourrions faire voir par quelques exemples, si nous n'avions dessein d'abreger.

C'est pourquoy pour finir plûtôt ce petit Traité d'Algebre, en attendant que nous en donnions un plus ample, nous ajoûterons seulement icy quelques Questions d'Arithmetique, pour vous faire voir l'application des regles que nous avons enseignées touchant la réduction des Equations, & pour vous

mettre en état d'en resoudre plusieurs autres, à l'imitation de celles que nous allons icy mettre, ausquelles il sera bon de s'exercer, si vous avez dessein de réussir.

RECUEIL

DE QUELQUES QUESTIONS D'ARITHMETIQUE,

Resoluës par l'Analyse nouvelle.

LEs raisonnemens que l'on est obligé de faire pour parvenir à la resolution d'une Question, s'exprimant sur le papier par les lettres de l'Alphabet, il est évident que ces lettres representent les quantitez qui sont connuës dans la Question, & aussi celles que l'on cherche, lesquelles, comme nous avons déja dit, s'expriment ordinairement par les dernieres lettres de l'Alphabet, x, y, z, &c.

Les quantitez connuës & inconnuës, qui servent à résoudre la Question, estant supposées en lettres, on suppose la Question comme resoluë, & de cette supposition l'on tire autant d'Equations que l'on peut, selon les conditions de la Question, en comparant ensemble ces grandeurs, pour en connoître les rapports, ce qui se fait en les ajoûtant ensemble, ou en les ôtant les unes des autres, ou bien en les multipliant, ou en les divisant par une même grandeur, selon la necessité, jusqu'à ce que l'on trouve une derniere Equation, laquelle estant resoluë par les Problêmes du Chapitre precedent, on trouvera enfin la valeur de la lettre inconnuë, que l'on substituera dans les premieres Equations, que l'on aura trouvées, lorsqu'il y aura plusieurs quantitez inconnuës, pour trouver dans l'une de ces Equations la valeur d'une autre quantité inconnuë, que l'on substituera pareillement jusqu'à ce que l'on soit parvenu à une Equation, où il n'y ait qu'une quantité inconnuë, pour l'y pouvoir connoître, & ensuite toutes les autres, comme vous allez voir dans les Questions suivantes, qui vous éclairciront ce que je viens de dire.

QUESTION I.

Trois personnes ont trouvé 120 écus, dont chacun en se jettant dessus en a pris ce qu'il a pû. Le premier dit que si avec l'argent qu'il a pris, il avoit encore 2 écus, il auroit dequoy payer un cheval qui est à vendre. Le second dit qu'il luy manque 4 écus pour payer le cheval: & le troisiéme dit qu'il luy en manque 6. On demande le prix du cheval, & l'argent de chacun.

POur résoudre cette Question, mettez la lettre x pour le prix du cheval, & alors l'argent du premier sera $x-2$, l'argent du second sera $x-4$, & l'argent du troisiéme sera $x-6$: & parce que tout cet argent, sçavoir $3x-12$ doit faire 120 écus, par la supposition, on aura cette Equation, $3x-12 \backsim 120$, ou ajoûtant 12 à chaque membre, on aura $3x \backsim 132$, & divisant par 3, on aura 44 pour le prix du cheval. Ainsi le prix du cheval est 44 écus, d'où ôtant 2 écus à cause de $x-2$, on aura 42 écus pour l'argent du premier: & si des mêmes 44 écus, on ôte 4 écus, à cause de $x-4$, on aura 40 écus pour l'argent du second: & enfin si des mêmes 44 écus on ôte 6 écus, à cause de $x-6$, on aura 38 écus pour l'argent du troisiéme. Or il est bien évident que la somme de ces trois nombres 42, 40, 38, qui sont l'argent des trois personnes, est 120, & qu'ainsi la Question est resoluë.

Scolie.

Pour n'être pas obligé de recommencer l'Analyse, lorsque les nombres qui sont donnez dans la Question, changeront, mettez des lettres pour ces nombres, comme a pour 120, b pour 2, c pour 4, & d pour 6 & alors l'argent du premier sera $x-b$, l'argent du second sera $x-c$, & l'argent du troisiéme sera $x-d$: & comme tout cet argent, qui vaut $3x-b-c-d$, doit estre égal au nombre donné a, on aura cette Equation, $3x-b-c-d \backsim a$, laquelle estant réduite par l'Antithese, & par le Parabolisme, donnera $x \backsim \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d$, pour la résolution générale de la Question, entendant pour *Resolution generale* celle qui se fait en lettres, parce qu'elle sert generalement pour resoudre la Question pour quelques nombres donnez que ce soit. Ainsi dans cette Question quelque valeur que l'on donne aux quatre lettres a, b, c, d, la Question se trouvera resoluë, sans qu'il soit besoin d'une nouvelle Analyse, sçavoir en restituant aux lettres a, b, c, d, leurs valeurs supposées.

Cela est aisé à comprendre, & nous ne nous amuserons pas dans la suite à en parler davantage.

QUESTION II.

Une personne entrant dans une Eglise donne 5 sols à un Pauvre, & en sortant il remarque que le reste de son argent s'est doublé par miracle : de quoy voulant remercier Dieu il entre dans une autre Eglise, où il donne 100 sols au premier pauvre qui se presente, aprés quoy il luy reste deux écus, ou 120 sols. On demande combien il avoit d'argent quand il est entré dans la premiere Eglise.

SI l'on met x pour l'argent qu'il avoit en entrant dans la premiere Eglise, il luy restera $x - 5$ en sortant, parce que l'on suppose qu'il a donné 5 sols aux pauvres : & comme l'on suppose aussi que ce reste s'est doublé, il aura $2x - 10$ en entrant dans la seconde Eglise, où ayant encore donné 100 sols aux pauvres, si de $2x - 10$, on ôte 100, le reste sera $2x - 110$, qui par la supposition doit estre égal à 120. Ainsi on aura cette Equation $2x - 110 \backsim 120$, où ajoûtant 110, on aura $2x \backsim 230$, & divisant par 2, on aura $x \backsim 115$, pour la resolution de la Question.

QUESTION III.

Un Marchand doit payer 250 livres en quatre termes : sçavoir au deuxiéme terme une livre plus qu'au premier, au troisiéme terme une livre plus qu'au second, & au quatriéme terme une livre plus qu'au troisiéme. On demande combien il payera à chaque terme.

SI l'on met x pour l'argent du premier terme, on aura $x + 1$ pour l'argent du second terme, $x + 2$ pour l'argent du troisiéme terme, & $x + 3$ pour l'argent du quatriéme terme : & comme tout cet argent, sçavoir $4x + 6$ doit valoir 250 livres, on aura cette Equation, $4x + 6 \backsim 250$, d'où ôtant 6, on aura $4x \backsim 244$, & divisant par 4, on aura $x \backsim 61$. Ainsi on aura 61 livres pour l'argent du premier terme, c'est pourquoy l'argent du second sera 62, celuy du troisiéme sera 63, & celuy du quatriéme sera 64.

QUES-

QUESTION IV.

Des Personnes ont promis de donner chacun 6 écus à un Patron, pour les conduire dans son Bateau de Lyon à Marseille, avec cette condition que s'il vient quelqu'un dans leur compagnie, en luy faisant le même prix, ils partageront le surplus entre eux, & que le Patron en aura une moitié, l'autre moitié se devant partager entre ces mêmes personnes, ou bien la donner au Patron, & luy diminuer à proportion des six écus que chacun luy avoit promis : Il est arrivé le quart de ces personnes & trois de plus, & chacune des premieres personnes n'a dû au Patron que 5 écus. On demande le nombre des premieres personnes.

Soit 4x nombre des premieres personnes.
Donc 24x Argent dû au Patron.
1x + 3 personnes arrivées.
6x + 18 surplus.
3x + 9 moitié du surplus, qu'il faut ôter de 24x; & il restera 21x—9 pour l'argent dû au Patron entre les premieres personnes. Si donc on divise cet argent par 4x, qui est le nombre des premieres personnes, on aura $\frac{21x-9}{4x}$ pour l'argent que chacun doit au Patron : & comme l'on suppose que chacun luy devoit 5 écus, on aura cette Equation, $\frac{21x-9}{4x} \backsim 5$, laquelle estant multipliée par 4x, on aura celle-cy, $21x-9 \backsim 20x$, & par l'Antithese on trouvera $x \backsim 9$, & par consequent $4x \backsim 36$ pour le nombre des personnes qu'on cherche.

QUESTION V.

Trois aunes de drap avec quatre aunes de taffetas ont coûté 57 livres, & au même prix cinq aunes du même drap avec deux aunes du même taffetas, ont coûté 81 livres. On demande combien vaut l'aune de drap, & l'aune de taffetas.

SI l'on met x pour la valeur de l'aune de drap, & y pour la valeur de l'aune de taffetas, on aura selon les conditions de la Question, ces deux Equations à resoudre.

$$3x+4y \backsim 57$$
$$5x+2y \backsim 81$$

Afin que dans chacune de ces deux Equations, l'une des deux quantitez inconnuës x, y, comme par exemple x, se trouve multipliée par un même nombre, ce qui est neces-

faire, afin qu'en ôtant une Equation de l'autre, il reste une troisiéme Equation, où il n'y ait que l'autre inconnuë y, pour l'y pouvoir connoître; multipliez la premiere Equation $3x+4y \propto 57$, par le nombre 5, qui multiplie l'inconnuë x dans la seconde, & reciproquement la deuxiéme $5x+2y \propto 81$, par le nombre 3, qui multiplie la même inconnuë x dans la premiere, & vous aurez ces deux autres Equations,

$$\begin{array}{r} 15x + 20y \propto 285 \\ 15x + 6y \propto 243 \\ \hline 14y \propto 42 \end{array}$$

Si l'on ôte la seconde de la premiere, on aura cette troisiéme Equation, $14y \propto 42$, laquelle étant divisée par 14, on aura $y \propto 3$, pour la valeur de l'aune de taffetas : & si à la place de y on substituë sa valeur trouvée 3, la premiere Equation $3x+4y \propto 57$, se changera en celle-cy, $3x+12 \propto 57$, d'où ôtant 12, & divisant le reste $3x \propto 45$ par 3, on aura $x \propto 15$, pour la valeur de l'aune de drap. Ainsi la Question sera resoluë.

QUESTION VI.

Une personne dit à une autre, si vous me donniez trois de vos écus, j'en aurois autant que vous : & l'autre luy répond, si vous m'en donniez cinq des vôtres, j'en aurois deux fois plus que vous. On demande combien chacun a d'écus.

SI l'on met x pour le nombre des écus du premier, & y pour le nombre des écus du second, on aura selon les conditions de la question ces deux Equations à resoudre.

$$\begin{array}{c} x+3 \propto y-3 \\ y+5 \propto 2x-10 \end{array}$$

Dans la premiere $x+3 \propto y-3$, on trouvera $y \propto x+6$, & dans la seconde $y+5 \propto 2x-10$, on trouvera la même $y \propto 2x-15$: c'est pourquoy on aura cette troisiéme Equation, $y+6 \propto 2x-15$, dans laquelle on trouvera $x \propto 21$, pour l'argent de la premiere personne, & au lieu de $y \propto x+6$, ou de $y 2x-15$, on aura $y \propto 27$, pour l'argent de l'autre.

QUES-

QUESTION VII.

Cent Personnes composées d'hommes, de femmes & d'enfans, ont dépensé dans un repas 100 livres, ou 2000 sols : chaque homme a dépensé 100 sols, chaque femme 20 sols, & chaque enfant 5 sols. On demande le nombre des hommes, des femmes, & des enfans.

SI l'on met x pour le nombre des hommes, y pour le nombre des femmes, & z pour le nombre des enfans, on aura selon les conditions de la Question, ces deux Equations à resoudre,

$$x + y + z \backsim 100$$
$$100x + 20y + 5z \backsim 200$$

Si de chaque membre de la premiere $x + y + z \backsim 100$, on ôte x & z, on aura $y \backsim 100 - x - z$, & si à la place de y, on met sa valeur trouvée $100 - x - z$, au lieu de $20y$, on aura $2000 - 20x - 20z$, & au lieu de la seconde Equation, $100x + 20y + 5z \backsim 2000$, on aura celle-cy, $80x - 15z + 2000 \backsim 2000$, d'où ôtant 2000, on aura celle cy, $80x - 15z \backsim 0$, & ajoûtant $15z$, on aura celle-cy, $80x \backsim 15z$, & divisant par 5, on aura celle-cy, $16x \backsim 3z$, & enfin divisant par 3, on aura cette derniere Equation, $\frac{16}{3}x \backsim z$, où l'on void que la quantité z seroit connuë, si l'autre quantité x étoit aussi connuë : & comme il n'y a rien qui determine cette quantité x, on connoît que la Question proposée est *Indeterminée*, c'est à dire qu'elle peut recevoir une infinité de solutions differentes, parce qu'il est libre de supposer la quantité indeterminée x telle que l'on voudra. Mais il y a icy une précaution à prendre touchant la valeur qu'on luy peut donner, afin que la quantité z, ou sa valeur trouvée $\frac{16}{3}x$ soit un nombre entier, ce qui doit être ainsi dans cette Question, parce que la valeur $\frac{16}{3}x$ represente le nombre des enfans, qui ne doit pas être une fraction par la nature de la Question. Il faut donc supposer pour x un nombre divisible par 3, qui est le dénominateur de la fraction $\frac{16}{3}x$. Si donc on suppose $x \backsim 3$, au lieu de $\frac{16}{3}x$ pour z, on aura 16, & au lieu de $100 - x - z$ pour y, on aura 81. Ainsi il y aura 3 hommes, 81 femmes, & 16 enfans, pour la resolution de la Question.

Pour avoir une autre solution, supposez $x \backsim 6$, & alors vous trouverez $z \backsim 32$, & par consequent $y \backsim 62$. Ainsi il y avoit 6 hommes 62 femmes, & 32 enfans, pour seconde solution.

Pour

Pour avoir une troisiéme solution, supposez $x \backsim 9$, & alors vous trouverez $z \backsim 48$, & par consequent $y \backsim 43$. Ainsi il y aura 9 hommes, 43 femmes, & 48 enfans, pour troisiéme solution.

Pour avoir une quatriéme solution, supposez $x \backsim 12$, & alors vous trouverez $z \backsim 64$, & par consequent $y \backsim 24$. Ainsi il y avoit 12 hommes, 24 femmes, & 64 enfans, pour quatriéme solution.

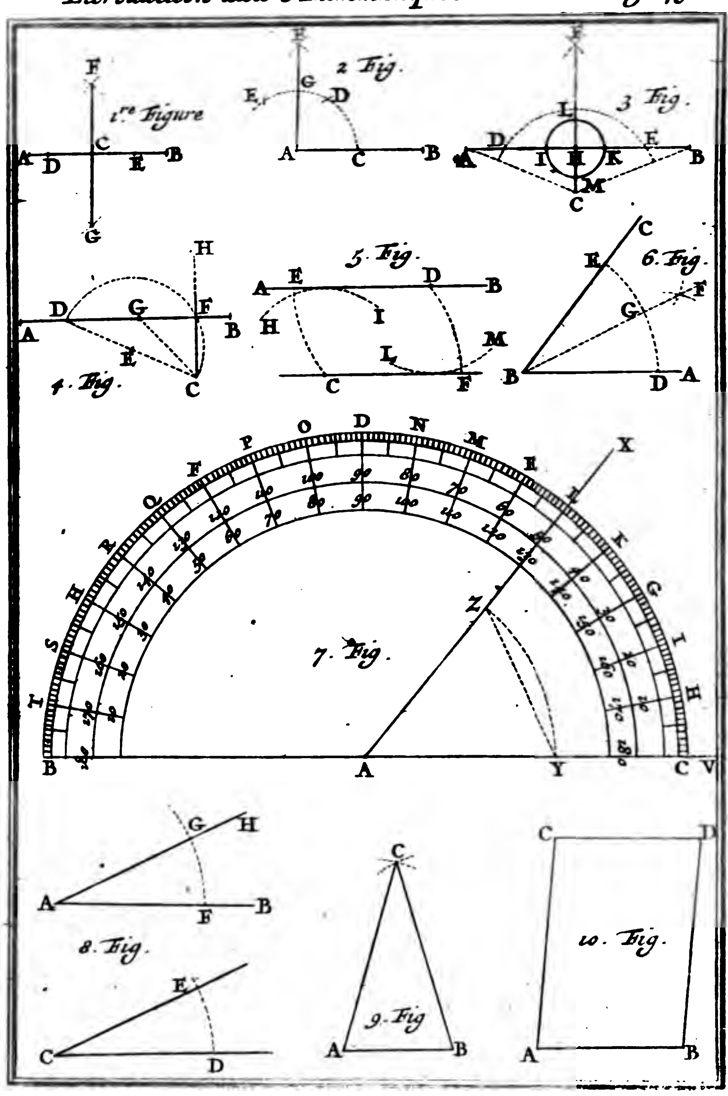
Pour avoir une cinquiéme solution, supposez $x \backsim 15$, & alors vous trouverez $z \backsim 80$, & par consequent $y \backsim 5$. Ainsi il y aura 15 hommes, 5 femmes, & 80 enfans, pour cinquiéme solution.

Il n'y a point d'autre solution en nombres entiers, parce qu'en mettant pour x un nombre multiple de 3, plus grand que 15, le nombre des hommes, des femmes & des enfans surpasseroit 100, ce qui est contre la supposition.

QUESTION VIII.

Une sale faite en Parallelogramme rectangle contient 90 toises quarrées dans son aire, & sa longueur comprend deux fois sa largeur, & trois toises de plus. On demande la longueur & la largeur.

SI l'on met x pour la largeur, on aura par la supposition $2x+3$ pour la longueur, laquelle étant multipliée par la largeur x, on aura $2xx+3x$ pour l'aire du Rectangle : & comme cette aire est supposée de 90 toises quarrées, on aura cette Equation $2xx+3x \backsim 90$, laquelle étant divisée par 2, on aura celle-cy, $xx+\frac{3}{2}x \backsim 45$. Ajoûtez à chaque membre le quarré $\frac{9}{16}$ de la moitié $\frac{3}{4}$ de la quantité connuë $\frac{3}{2}$ du second terme, pour avoir cette Equation, $xx+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16} \backsim \frac{729}{16}$, dont la Racine quarrée donnera cette Equation plus basse, $x+\frac{3}{4} \backsim \frac{27}{4}$ de laquelle ôtant $\frac{3}{4}$, on aura $x \backsim 6$, pour la largeur qu'on cherche, & au lieu de $2x+3$, on aura 15 pour la longueur. Ainsi la longueur du Rectangle qu'on cherche, sera de 15 toises, & sa largeur sera de 6.



1.re Figure
2 Fig.
3 Fig.
4. Fig.
5. Fig.
6. Fig.
7. Fig.
8. Fig.
9. Fig
10. Fig.



PRATIQUES DE GEOMETRIE,

Tant sur le Papier que sur le Terrain.

NOstre dessein est d'ajoûter seulement ici les Problêmes les plus utiles, & les plus faciles, pour travailler sur la terre & sur le papier, pour ceux qui commencent & qui n'ont aucune pratique, afin de les disposer à mieux entendre ce que nous avons à dire dans la suite, qui demande plus de connoissance, sans prendre la peine d'ajoûter icy les définitions de plusieurs termes vulgaires, qui sont généralement assez entendus de tout le monde, ou qui se peuvent entendre sans peine par les pratiques qui seront enseignées, en attendant que ces termes soient expliquez & définis dans leur lieu.

PROBLEME I.

Tirer une ligne droite d'un point à un autre point donné sur un Plan.

PRemierement si les deux points sont donnez sur le papier, ou sur quelqu'autre Plan de petite étenduë, comme A, B, chacun sçait naturellement qu'il n'y a qu'à appliquer une regle droite sur les deux points donnez, A, B, pour y tirer une ligne droite par le moyen d'un crayon, ou d'une pointe, que l'on fera couler le long de la regle. Planche I. 1. Fig.

Secondement pour tirer une ligne droite par deux points donnez sur la terre, il est évident aussi qu'il n'y a qu'à appliquer aux deux points donnez un cordeau tendu par ses deux extremitez, comme font les Artisans, lorsque ces deux points ne sont pas beaucoup éloignez : autrement on se servira du Rayon visuel que l'on conduit par les pinnules de quelque 1. Fig.

Planche 1. 3. Fig. que inſtrument, en faiſant planter des piquets à quelqu'un de diſtance en diſtance le long du Rayon viſuel, & l'avertiſſant par parole ou par ſigne, quand il s'écartera de la ligne droite.

Cette pratique eſt ordinaire aux Arpenteurs & aux Ingenieurs, qui ont ſouvent beſoin de tirer ſur la terre des lignes droites d'une longue étenduë: & quand il ſe trouve quelque danger, comme lorſqu'un Ingenieur veut conduire une Trenchée vers une Place aſſiegée, il trace cette ligne par le moyen d'un feu couvert & caché à l'Ennemi, que l'on poſe au lieu que l'on a remarqué de jour, & auquel on deſire parvenir, pour dreſſer le travail des Soldats, & faire les Approches.

PROBLEME II.

Tirer une ligne perpendiculaire à une ligne donnée par un point donné.

IL peut arriver trois cas, car le point donné peut être ou dans la ligne donnée, ou à l'une des deux extremitez de la ligne donnée, ou bien hors la ligne donnée. Et de plus le point & la ligne peuvent être donnez ou ſur la terre, ou ſur le papier. Nous travaillerons premierement ſur le papier avec le compas & la regle, pour travailler de la même façon ſur la terre avec le cordeau & le piquet.

Premierement donc ſi l'on donne le point C ſur la ligne donnée AB, pour luy tirer une perpendiculaire par ce point donné C, prenez à volonté depuis le point donné C, ſur la ligne donnée AB, de part & d'autre les deux diſtances égales CD, CE, & décrivez des deux points E, D, avec une ouverture volontaire du compas, mais plus grande que CD, ou que CE, deux arcs de cercle de part & d'autre, qui ſe coupent icy aux deux points F, G, par où vous tirerez la droite FG, laquelle ſi vous avez bien fait, paſſera par le point donné C, & ſera perpendiculaire à la ligne propoſée AB.

Quand on n'a point de compas, on peut ſe ſervir d'une équierre, en appliquant ſon angle droit au point donné C, enſorte que l'un de ſes côtez réponde preciſément ſur l'une des deux parties AC, BC, comme par exemple ſur la partie AC, & alors on pourra tirer le long de l'autre côté par le point donné C, la perpendiculaire CF qu'on cherche: & pour ſçavoir ſi on l'a bien tirée, & même pour connoître ſi l'équiere eſt bonne, on appliquera l'un de ſes côtez ſur l'autre partie BC, car alors l'autre côté doit convenir avec la perpendiculaire CF.

Lorsque la ligne AB sera donnée sur la terre, on pourra faire des deux points E, D, deux arcs de cercle avec des cordeaux d'une longueur volontaire, mais égale & plus grande que l'une des deux lignes CD, CE: & comme il n'est pas toûjours commode de décrire sur la terre des arcs de cercle, il vaudra mieux joindre ensemble les deux bouts de ces cordeaux, qui doivent être également tendus, pour avoir le point F, par lequel & par le point donné C, on pourra tirer la perpendiculaire CF. Planche I. 1. Fig.

On pourra aussi tirer cette perpendiculaire CF, en faisant au point donné C, avec un Graphometre, ou autrement, un angle de 90 degrez, comme il sera enseigné au *Probl.* 9. On pourra faire la même chose sur un papier avec un Transporteur, ou bien avec un compas de proportion, ou autrement, comme il sera aussi enseigné au *Probl.* 9.

Secondement si le point par où il faut tirer une perpendiculaire à la ligne donnée AB, est donné en l'une de ses extremitez, comme A, décrivez à volonté de ce point A, l'arc de cercle CDE, & y portez la même ouverture du compas deux fois depuis le point C, où il coupe la ligne AB, en D, & depuis D en E, pour décrire des deux points E, D, avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, qui se coupent icy au point F, par lequel & par le point donné A, vous tirerez la droite AF, qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB. 2. Fig.

On peut aussi tirer cette perpendiculaire par le moyen d'une équierre, ou bien en faisant au point donné A, un angle de 90 degrez. Mais nous enseignerons encore une autre methode pour la même fin dans la *Prop.* 31. *l.* 3. *des Elemens d'Euclide.*

Quand il faudra tirer une perpendiculaire sur la Terre, on pourra aussi faire à l'extremité A de la ligne AB, un angle de 90 degrez: ou bien on pourra travailler comme il sera enseigné dans la *Prop.* 48. *l.* 1. & aussi dans la *Prop.* 31. *l.* 3. *des Elemens d'Euclide.*

Enfin si le point par lequel il faut tirer la perpendiculaire est donné hors de la ligne donnée AB, comme C, décrivez à volonté de ce point C, l'arc de ce cercle DE, qui coupe la ligne donnée AB, en deux points, comme D, E, desquels vous décrirez avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, pour tirer par leur point de section F, au point donné C, la droite CF, qui sera la perpendiculaire qu'on cherche. 3. Fig.

Il peut arriver que le point donné C, sera tellement proche de l'une des deux extremitez de la ligne donnée AB, qu'il sera difficile d'en décrire un cercle, qui la puisse commodément couper en deux points; dans ce cas il faudra 4. Fig.

tirer

Pratique 12 tirer par le point donné C, vers l'autre extremité, la droite CD, que vous diviserez en deux également au point E, pour en décrire par les deux points C, D, le demi-cercle CFD, qui donnera sur la ligne donnée AB, le point F, par où doit passer la perpendiculaire CF.

3. Fig. Lors que le point donné, C, sera sur la terre, il en faut décrire avec un cordeau un arc de cercle qui coupe la ligne donnée AB en deux points, comme D, E, & diviser la ligne DE en deux également au point H, par lequel & par le point donné C, vous pourrez tirer la perpendiculaire CH.

4. Fig. Si le cordeau ne peut pas commodément couper la ligne donnée AB, en deux points, ce qui arrivera lorsque le point donné C sera vers l'une des deux extremitez de la ligne AB; on l'étendra vers l'autre extremité, jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne AB, en quelque point, comme D, & l'ayant divisé en deux également au point E, on étendra sa moitié EC, ou ED, depuis E jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne donnée AB, en un point, comme F, par lequel on pourra tirer la perpendiculaire CF.

4. Fig. Ou bien décrivez par le point donné C, des deux points, G, D, pris à discretion sur la ligne donnée AB, avec un cordeau si vous travaillez sur la terre, ou avec un compas si vous travaillez sur le papier, deux arcs de cercle, qui se coupent icy au point H; par lequel & par le point donné C, vous pourrez tirer la perpendiculaire CH.

Si l'on ne peut pas commodément tracer des arcs de cercle sur la terre, attachez au point donné C un cordeau, & l'étendez jusqu'à ce qu'il rase la ligne donnée AB, ce qui étant fait, il en faut mesurer exactement la longueur, qui donnera la quantité de la perpendiculaire CF, que nous supposerons de 6. toises. Aprés cela cherchez un nombre quarré, duquel ôtant le quarré de 6, c'est à dire 36, le reste soit un nombre quarré. Ce premier & plus grand nombre quarré est 100, dont le côté 10 representera la longueur de la ligne CD: car si de 100 on ôte 36, il reste 64, dont la Racine quarrée est 8, qui represente la longueur de la partie DF, la perpendiculaire CF, étant 6, comme nous avons déja dit. Attachez donc au point donné C, un cordeau long de 10 toises, & l'étendez jusqu'à ce que son extremité rencontre la ligne donnée AB, en quelque point, comme en D, d'où vous compterez sur la ligne donnée AB, vers le point donné C, 8 toises, par exemple jusqu'au point F, par lequel on pourra tirer la perpendiculaire CF.

4. Fig. Pour trouver un nombre quarré, duquel ôtant un nombre quarré donné, il reste un nombre quarré, servez-vous de ce canon général, que nous avons tiré de l'Algebre.

Si

Si au quarré donné on ajoûte un quarré indeterminé plus grand ou plus petit que le quarré donné, & qu'on divise la somme par le double du côté du même quarré indeterminé ; on aura le côté du quarré qu'on cherche. Planche 1. 4. Fig.

Comme si au quarré donné 36, on ajoûte le quarré 4, dont le côté est 2, & que par le double 4 de ce côté 2, on divise la somme 40, le quotient 10 donnera le côté du quarré qu'on cherche, ou la longueur de la ligne DF.

Pareillement si au même quarré donné 36, on ajoûte le quarré 9, dont le côté est 3, & qu'on divise la somme 45 par le double 6 du même côté 3, on aura 7 toises & 3 pieds pour la ligne DF, & alors la ligne CD sera de 4 toises & 6 pieds.

Toutes ces pratiques sont seulement bonnes sur le terrain, lorsque le point donné C n'est pas beaucoup éloigné de la ligne donnée, AB, car quand la distance de ce point est considerable, on ne pourroit pas commodément se servir de cordeaux, lesquels quand même ils seroient assez grands, ne pourroient pas facilement être tendus. Dans ce cas on peut se servir du *Bâton de l'Arpenteur*, qui est un bâton haut de 4 ou de 5 pieds, qui soûtient au dessus une plaque ronde de cuivre fenduë le long de deux diametres perpendiculaires entre eux, pour conduire les rayons visuels, ou bien contenant quatre *Pinnules*, ou petites pieces de cuivre élevées à angles droits aux extremitez de ces deux diametres perpendiculaires, pour la même fin. Ce Bâton est pointu par le bas, pour pouvoir être facilement fiché en terre, ou bien il est soûtenu par trois autres bâtons, qui y sont attachez, & qui se peuvent élargir autant que l'on voudra, pour pouvoir l'arrêter, & hausser & baisser la plaque de cuivre autant qu'il en sera besoin, & s'en servir en cette sorte.

Pour donc tirer du point donné C sur la terre une perpendiculaire à la ligne donnée AB, élevez à plomb le bâton sur cette ligne AB, & tournez la plaque ronde jusqu'à ce que regardant le long du diametre IK, vous voyez les deux extremitez A, B, de la même ligne AB, & alors ce diametre IK, répondra precisément sur la ligne AB : & tenant l'Instrument dans cette situation, il luy faut changer de place en l'avançant à droit ou à gauche, jusqu'à ce que par l'autre diametre perpendiculaire LM, on puisse voir le point donné C, & le point H, où le bâton se trouvera arrêté, sera celuy par lequel & par le point donné C, on pourra tirer la perpendiculaire CH. 3. Fig.

On peut se passer du Bâton d'Arpenteur, en tirant par pensée du point donné C, à deux points pris à discretion sur la ligne donnée AB, comme A, B, les deux lignes CA, CB, en sorte que le point donné C, soit s'il est possible, entre les deux

Planche 1. deux points A, B, c'est à dire que la perpendiculaire CH soit entre les deux lignes CA, CB, ou au dedans du triangle ABC, dont les trois côtez doivent être mesurez exactement, pour trouver par leur moyen la distance du point H de la perpendiculaire à l'un des deux points A, B, comme A, qui répond au côté AC, que je suppose le plus grand; ce qui se fera en cette sorte.

3. Fig.

Divisez par le double de la base AB du triangle ABC, l'excez de la somme du quarré de la même base AB, & du quarré du plus grand côté AC, sur le quarré du plus petit BC.

Comme si le plus grand côté AC est de 15 toises, le plus petit BC de 13, & la base AC de 14, en divisant l'excez 252 de la somme 421 des quarrez AB, AC, sur le quarré BC, par le double 28 de la base AB, on aura 9 toises pour la distance du point H de la perpendiculaire au point A. Si donc on compte 9 toises depuis A jusqu'en H, & que l'on tire la droite CH, elle sera la perpendiculaire qu'on cherche.

4. Fig. Si l'on ne peut pas commodément choisir sur la ligne donnée AB, deux points, entre lesquels soit le point F de la perpendiculaire, comme si l'on ne pouvoit prendre que les deux points A, G, en sorte que la perpendiculaire CF tombe au dehors du triangle ACG, dont on doit connoître pareillement les côtez AG, AC, CG; on pourra trouver la distance FG, du point F de la perpendiculaire au point G le plus proche en cette sorte.

Divisez par le double de la base AG, l'excez du quarré du plus grand côté AC, sur la somme des quarrez des deux autres côtez AG, CG.

Comme si le plus grand côté AC est de 15 toises, la base AG de 4, & l'autre côté CG de 13, en divisant l'excez 40 du quarré AC, qui est 225, sur la somme 185 des quarrez 16, 169, des deux autres côtez AG, CG, par le double 8, de la base AG, on aura 5 toises pour la distance FG, &c. Nous donnerons dans la *Prop.* 15. *l.* 1 *des Elemens d'Euclide* une autre methode pour tirer une perpendiculaire.

PROBLEME III.

Tirer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.

5. Fig. Pour tirer par le point donné C une ligne parallele à la ligne donnée AB, décrivez du point D, pris à discretion sur la ligne AB, par le point C, l'arc de cercle CE, & du point C par le point D, l'arc de cercle DF égal au precedent CE,

& vous

& vous aurez le point F, par lequel & par le point donné C, vous tirerez la droite CF, qui sera parallele à la proposée AB. Planche 1. 5. Fig.

Ou bien décrivez du point donné C, l'arc de cercle HI, qui touche & rase la ligne donnée AB, & du point D, pris à discretion sur la même ligne AB, décrivez avec la même ouverture du compas, l'arc de cercle LM. Enfin tirez par le point donné C, la droite CF, qui touche & rase l'arc LM; laquelle sera la parellele qu'on cherche. Quand il faudra travailler sur la terre, on fera comme il sera enseigné à la *Prop.* 31. *l.* 1. *des Elemens d'Euclide*. Nous enseignerons à la *Prop.* 34. *l.* 1. des mêmes Elemens une autre methode pour tirer une parallele à une ligne donnée par un point donné sur le papier: & dans la *Prop.* 21. *l.* 3. des mêmes Elemens, nous enseignerons une methode pour tirer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée inaccessible sur la terre.

PROBLEME IV.

Diviser une ligne donnée en deux également.

POur diviser la ligne donnée AB, en deux parties égales, décrivez de ses deux extremitez A, B, avec une même ouverture du compas de part & d'autre, deux arcs de cercle, qui se coupent icy aux deux points F, G, par lesquels vous tirerez la droite FG, qui divisera en deux également la ligne proposée AB, au point C, de sorte que les deux parties AC, BC, seront égales. 1. Fig.

C'est de la même façon que l'on travaillera sur la terre, en faisant les arcs de cercle avec deux cordeaux de même grandeur, attachez aux deux extremitez A, B. Mais pour n'avoir pas la peine de faire des arcs de cercle, ce qui est assez difficile quand le terrain est inégal, & raboteux, ou bien rempli de broussailles, on pourra joindre les deux extremitez de ces deux cordeaux, de côté & d'autre, pour avoir les deux points F, G: ou plus facilement on étendra un cordeau le long de la ligne AB, & on le redoublera en joignant ses deux bouts, car ainsi on aura la moitié de la ligne proposée, AB, & il n'y aura plus qu'à porter cette moitié, ou cordeau redoublé sur la ligne AB, depuis l'une de ses deux extremitez A, ou B, pour avoir en C, le point du milieu qu'on cherche.

Si le cordeau est plus petit que la ligne proposée AB, on en retranchera les deux parties égales AD, BE, & l'on divisera en deux également la ligne DE.

PROBLEME V.

Diviser un arc de cercle donné en deux également.

Planche 1. 2. Fig. POur diviser en deux parties égales l'arc de cercle DE, dont le centre est A, décrivez de ses deux extremitez E, D, avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, qui se coupent icy au point F, duquel vous tirez au centre A la droite AF, qui divisera en deux également l'arc proposé DE, au point G.

5. Fig. Quand nous disons qu'il faut faire deux arcs de cercle avec une même ouverture du compas, sans rien specifier, cela s'entend que cette ouverture peut être telle que l'on voudra, pourvû que les deux arcs se puissent couper.

Si l'on n'avoit pas le centre de l'arc proposé DE, on le divisera en deux également au moyen du Problême precedent, comme si cét arc étoit une ligne droite.

PROBLEME VI.

Diviser un angle donné en deux également.

6. Fig. POur diviser en deux angles égaux l'angle donné ABC, décrivez de sa pointe B, l'arc de cercle DE, avec une ouverture volontaire du compas, & la plus grande sera la meilleure, & des deux extremitez E, D, décrivez avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, qui se coupent icy au point F, par lequel & par la pointe B, vous tirerez la droite BF, qui divisera l'angle proposé ABC, en deux également, c'est à dire que les deux angles ABF, CBF, seront égaux entre eux, aussi-bien que les deux arcs GD, GE, qui les mesurent.

Lorsque l'angle ABC sera donné sur la terre, on connoîtra de combien il est de degrez; comme il sera enseigné au *Probl.* 8. & par le *Probl* 9. on fera à la pointe B, avec la ligne AB, ou avec la ligne BC, un angle égal à la moitié de l'angle proposé ABC, par la droite BF, laquelle par consequent divisera en deux également l'angle ABC.

PRO-

PROBLEME VII.

Diviser la circonference d'un cercle en Degrez.

LEs Mathematiciens divisent la circonference d'un cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent *Degrez* : chaque Degré en 60 parties égales plus petites appellées *Minutes* : chaque Minute en 60 autres parties égales, qu'ils ont appellées *Secondes*, & ainsi en suite. Ils ont choisi le nombre 360 pour le cercle, & le nombre 60 pour les soûdivisions parce que ces deux nombres ont plusieurs parties aliquotes, & qu'ainsi ils sont plus commodes dans la pratique. Nous nous contenterons de la division du demi-cercle en 180 degrez, parce que cela suffit pour ce que nous en avons besoin.

Ayant décrit du point A, pris à discretion sur la ligne indefinie BC, le Demi-cercle BDC, divisez premierement sa circonference en trois parties égales, en portant la même ouverture du compas, c'est à dire la longueur du diametre AB, ou AC, depuis C en E, & depuis E en F, ou bien depuis B, en F, & depuis F en E pour avoir les trois parties égales CE, EF, FB, dont chacune vaudra 60 degrez. Divisez l'arc CE en deux également au point G, l'arc EF en deux également au point D, l'arc FB en deux également au point H, & le Demi-cercle se trouvera divisé en six parties égales, dont chacune vaudra 30 degrez. Divisez l'arc CG en trois parties égales aux points H, I; l'arc GE en trois parties égales aux points K, L. l'arc ED en trois parties égales aux points M, N, l'arc DF en trois parties égales aux points O, P, l'arc FH en trois parties égales aux points Q, R, & l'arc BH en trois parties égales aux points S, T : & le Demi-cercle se trouvera divisé en 18 parties égales, dont chacune comprendra 10 degrez; c'est pourquoy si l'on divise chacune de ces 18 parties égales en deux autres parties égales, le Demi-cercle se trouvera divisé en 36 parties égales, dont chacune étant enfin divisée en cinq parties égales, le Demi-cercle se trouvera divisé en ses 180 degrez, ausquels on ajoûtera des chifres de 10 en 10 degrez, comme vous voyez dans la Figure qui represente ce Demi-cercle que les Ouvriers font ordinairement sur du leton, & qu'ils appellent *Rapporteur*, ou *Transporteur*, parce qu'en le transportant sur un angle, on peut mesurer la quantité de cet angle, ou bien en le transportant sur une ligne donnée, on peut y faire un angle d'autant de degrez que l'on voudra, comme nous allons enseigner dans les deux Problêmes suivans.

Planche 1. 7. Fig.

Planche 1. 7. Fig.

PROBLEME VI.

Connoître de combien de dégrez est un Angle proposé.

COmme la mesure d'un angle rectiligne est l'arc d'un cercle quelconque décrit de sa pointe, il s'ensuit que si l'on sçait le nombre des degrez compris entre les lignes de l'angle, on aura la valeur de cet angle. C'est pourquoy s'il est proposé de mesurer la quantité de l'angle VAX, appliquez le Transporteur sur cet angle, en sorte que son centre réponde sur la pointe A de l'angle & son diametre AC sur l'une des deux lignes de l'angle, comme sur la ligne AY, & alors l'arc CL du Rapporteur, compris entre les deux lignes de l'angle, se rencontrant icy de 50 degrez, fait connoître que l'angle proposé VAX est de 50 degrez.

Si vous n'avez point de rapporteur, servez-vous du Compas de proportion en cette sorte. Ayant décrit à volonté de la pointe A de l'angle donné VAX, l'arc de cercle YZ, portez la même ouverture AY, ou AZ, sur la ligne des cordes du Compas de proportion, de 60 à 60: & le Compas de proportion, demeurant ainsi ouvert, vous y porterez sur la même ligne des cordes l'arc YZ, & le nombre égal de degrez où cette ouverture s'accordera de part & d'autre, donnera la quantité de l'arc HK, & par consequent de l'angle proposé VAX.

Si l'angle est donné sur la terre, réellement, ou par imagination, on le mesurera par le moyen d'un grand Demicercle divisé exactement en ses 180 degrez, & quelquefois en minutes, ou pour le moins de 5 en 5 minutes. Ce Demicercle, que les Suedois & les Allemans appellent ordinairement *Astrolabe*, & que plusieurs d'entre-nous appellent *Graphometre*, se fait ordinairement de cuivre, & contient une *Alidade*, ou Regle de même metal, qui est mobile autour du centre du Demi-cercle, & qui porte deux pinnules élevées à angles droits, de sorte que les trous, ou les petites fentes qui servent à conduire les rayons visuels, répondent perpendiculairement sur la *Ligne de foy*, qui est une ligne droite tirée sur l'Alidade, ou le long de l'Alidade, & qui répond au centre de l'instrument, où se forment les angles visuels.

Cet Instrument a encore deux semblables pinnules élevées à angles droits, chacune proche de l'une des deux extremitez B, C, du diametre BC, de sorte que pareillement les fentes de ces deux Pinnules, qui servent aussi pour conduire la vûë, répondent perpendiculairement sur le diametre BC. Cet instrument est si commun, qu'il ne semble pas necessaire

faire d'en faire icy une plus longue description, c'est pour- Planche
quoy j'enseigneray à present la maniere de s'en servir pour 1.
mesurer un angle accessible sur la terre. 7. Fig.

Pour donc mesurer sur la terre l'angle accessible VAX appliquez sur cet angle le Demi-cercle, qui doit être soûtenu par un Bâton semblable à celuy dont nous avons parlé auparavant, en sorte que son centre réponde perpendiculairement sur la pointe de l'angle, ce que l'on peut aisément executer avec un plomb; & tenant l'instrument à peu prés parallele au plan de l'angle proposé, tournez-le jusques à ce que par les pinnules immobiles vous apperceviez quelque point de la ligne AV, car ainsi le diametre BC, répondra sur cette ligne AV, ce qui doit toûjours ainsi être: & l'Instrument étant arrêté dans cette situation, tournez l'Alidade jusques à ce que par les trous de ses pinnules vous voyez quelque point de l'autre ligne AX, & alors la ligne de foy montrera sur la circonference du Demi-cercle, le nombre des degrez de l'angle proposé VAX.

On peut aussi tres-facilement & tres-exactement, mesurer un angle accessible sur la terre, par le moyen de la Table suivante, qui montre les degrez & les minutes des angles, dont les deux lignes sont chacune de 30 pieds, & dont les bases sont des lignes droites, qui croissent de deux en deux pieds seulement, ce qui suffit pour la pratique.

Table des Angles Plans compris par deux côtez de 30 pieds.

Bases.		Angles.		Bases.		Angles.		Bases.		Angles.	
Pi	Po	D.	M.	Pi	Po	D.	M.	Pi	Po	D.	M.
0	0	0	0	5	0	9	34	10	0	19	11
0	2	0	19	5	2	9	53	10	2	19	30
0	4	0	38	5	4	10	12	10	4	19	50
0	6	0	57	5	6	10	31	10	6	20	19
0	8	1	8	5	8	10	50	10	8	20	29
0	10	1	36	5	10	11	9	10	10	20	48
1	0	1	55	6	0	11	29	11	0	21	8
1	2	2	14	6	2	11	48	11	2	21	27
1	4	2	33	6	4	12	8	11	4	21	46
1	6	2	52	6	6	12	27	11	6	22	6
1	8	3	11	6	8	12	46	11	8	22	25
1	10	3	30	6	10	13	5	11	10	22	45
2	0	3	49	7	0	13	24	12	0	23	5
2	2	4	8	7	2	13	43	12	2	23	24
2	4	4	28	7	4	14	2	12	4	23	44
2	6	4	47	7	6	14	22	12	6	24	3
2	8	5	6	7	8	14	41	12	8	24	32
2	10	5	25	7	10	15	0	12	10	24	52
3	0	5	44	8	0	15	20	13	0	25	1
3	2	6	3	8	2	15	39	13	2	25	21
3	4	6	22	8	4	15	58	13	4	25	41
3	6	6	41	8	6	16	18	13	6	26	1
3	8	7	0	8	8	16	37	13	8	26	20
3	10	7	20	8	10	16	56	13	10	26	40
4	0	7	39	9	0	17	15	14	0	26	59
4	2	7	58	9	2	17	34	14	2	27	18
4	4	8	17	9	4	17	54	14	4	27	38
4	6	8	36	9	6	18	13	14	6	27	58
4	8	8	55	9	8	18	32	14	8	28	18
4	10	9	14	9	10	18	52	14	10	28	38

Table des Angles Plans compris par deux côtez de 30 pieds.

Bases.		Angles.		Bases.		Angles.		Bases.		Angles.	
Pi	Po	D.	M.	Pi	Po	D.	M	Pi	Po	D.	M.
15	0	28	57	20	0	38	56	25	0	49	15
15	2	29	17	20	2	39	17	25	2	49	36
15	4	29	37	20	4	39	38	25	4	49	57
15	6	29	56	20	6	39	58	25	6	50	18
15	8	30	16	20	8	40	18	25	8	50	39
15	10	30	36	20	10	40	38	25	10	51	0
16	0	30	56	21	0	40	59	26	0	51	21
16	2	31	16	21	2	41	19	26	2	51	42
16	4	31	36	21	4	41	40	26	4	52	3
16	6	31	56	21	6	42	0	26	6	52	24
16	8	32	16	21	8	42	20	26	8	52	46
16	10	32	35	21	10	42	40	26	10	53	8
17	0	32	55	22	0	43	1	27	0	53	29
17	2	33	15	22	2	43	22	27	2	53	51
17	4	33	35	22	4	43	42	27	4	54	12
17	6	33	55	22	6	44	3	27	6	54	34
17	8	34	15	22	8	44	24	27	8	54	55
17	10	34	35	22	10	44	44	27	10	55	16
18	0	34	55	23	0	45	5	28	0	55	38
18	2	35	15	23	2	45	26	28	2	56	0
18	4	35	35	23	4	45	46	28	4	56	22
18	6	35	55	23	6	46	7	28	6	56	43
18	8	36	15	23	8	46	28	28	8	57	5
18	10	36	35	23	10	46	48	28	10	57	26
19	0	36	55	24	0	47	9	29	0	57	48
19	2	37	15	24	2	47	30	29	2	58	10
19	4	37	36	24	4	47	51	29	4	58	32
19	6	37	56	24	6	48	12	29	6	58	54
19	8	38	16	24	8	48	33	29	8	59	16
19	10	38	36	24	10	48	54	29	10	59	38

Table des Angles Plans compris par deux côtez de 30 pieds.

Bases.		Angles.		Bases.		Angles.		Bases.		Angles.	
Pi	Po	D.	M.	Pi	Po	D.	M.	Pi	Po	D.	M.
30	0	60	0	35	0	71	22	40	0	83	37
30	2	60	22	35	2	71	46	40	2	84	3
30	4	60	44	35	4	72	10	40	4	84	29
30	6	61	6	35	6	72	33	40	6	84	54
30	8	6	28	35	8	72	56	40	8	85	20
30	10	61	50	35	10	73	20	40	10	85	46
31	0	62	13	36	0	73	44	41	0	86	13
31	2	62	35	36	2	74	8	41	2	86	39
31	4	62	58	36	4	74	32	41	4	87	5
31	6	63	20	36	6	73	56	41	6	87	32
31	8	63	43	36	8	75	20	41	8	88	58
31	10	64	5	36	10	75	44	41	10	88	25
32	0	64	28	37	0	76	9	42	0	88	51
32	2	64	50	37	2	76	33	42	2	89	18
32	4	65	13	37	4	76	57	42	4	89	45
32	6	65	36	37	6	77	22	42	6	90	12
32	8	65	58	37	8	77	46	42	8	90	39
32	10	66	21	37	10	78	9	42	10	91	6
33	0	66	44	38	0	78	35	43	0	91	33
33	2	67	7	38	2	79	0	43	2	92	1
33	4	67	30	38	4	79	25	43	4	92	29
33	6	67	53	38	6	79	50	43	6	92	56
33	8	68	16	38	8	80	14	43	8	93	24
33	10	68	39	38	10	80	40	43	10	93	52
34	0	69	2	39	0	81	5	44	0	94	20
34	2	69	25	39	2	81	30	44	2	94	48
34	4	69	48	39	4	81	55	44	4	95	16
34	6	70	12	39	6	82	20	44	6	95	45
34	8	70	35	39	8	82	46	44	8	96	13
34	10	70	59	39	10	83	12	44	10	96	42

Table des Angles Plans compris par deux côtez de 30 pieds.

Bases.		Angles.		Bases.		Angles.		Bases.		Angles.	
Pi	Po	D.	M.	Pi	Po	D.	M	Pi	Po	D.	M.
45	0	97	11	50	0	112	53	55	0	132	53
45	2	97	40	50	2	113	28	55	2	133	44
45	4	98	9	50	4	114	4	55	4	134	30
45	6	98	38	50	6	114	38	55	6	135	20
45	8	99	8	50	8	115	14	55	8	136	11
45	10	99	37	50	10	115	49	55	10	137	3
46	0	100	6	51	0	116	26	56	0	137	7
46	2	100	36	51	2	117	2	56	2	138	49
46	4	101	6	51	4	117	39	56	4	139	44
46	6	101	36	51	6	118	16	56	6	140	50
46	8	102	7	51	8	118	53	56	8	141	38
46	10	102	37	51	10	119	31	56	10	142	6
47	0	103	8	52	0	120	9	57	0	143	36
47	2	103	39	52	2	120	47	57	2	144	39
47	4	104	10	52	4	121	26	57	4	5	43
47	6	104	41	52	6	122	6	57	6	6	48
47	8	105	12	52	8	122	45	57	8	147	57
47	10	105	44	52	10	123	25	57	10	149	8
48	0	106	16	53	0	124	6	58	0	150	20
48	2	106	48	53	2	124	47	58	2	151	36
48	4	107	20	53	4	125	28	58	4	152	55
48	6	107	52	53	6	126	10	58	6	154	19
48	8	108	25	53	8	126	52	58	8	155	48
48	10	108	57	53	10	127	35	58	10	157	22
49	0	109	30	54	0	128	19	59	0	159	3
49	2	110	4	54	2	129	3	59	2	160	53
49	4	110	37	54	4	129	48	59	4	162	54
49	6	111	11	54	6	130	33	59	6	165	12
49	8	111	44	54	8	131	19	59	8	167	48
49	10	111	18	34	10	132	6	59	10	171	28

Planche 1. 7. Fig. Si donc il eſt propoſé de connoître la quantité de l'angle VAX prenez ſur chacune de ſes deux lignes AV, AX, les deux parties AY, AZ, chacune de 30 pieds, & meſurez exactement en pieds & en pouces la baſe YZ, que nous ſuppoſerons de 25 pieds & 6 pouces, auſquels il répond dans la Table, 50 degrez & 18 minutes pour la quantité de l'angle propoſé VAX.

On peut auſſi ſe ſervir de la même Table pour meſurer le même angle VAX, quand il ſera ſur le papier, ſçavoir en prenant ſur ſes deux lignes AV, AX, les deux parties AY, AZ, chacune de 30 parties égales priſes ſur quelque *Echelle*, c'eſt à dire ſur une ligne diviſée exactement en parties égales, & en portant la baſe YZ ſur la même échelle, pour ſçavoir combien de ſemblables parties égales elle contient, car ce nombre de parties égales étant cherché dans la colonne des baſes de la Table precedente, donnera vis à vis dans l'autre colonne les degrez & les minutes de l'angle propoſé VAX.

PROBLEME IX.

Faire à un point donné ſur une ligne donnée un angle d'une grandeur donnée.

7. Fig. POur faire au point donné A ſur la ligne donnée AV, un angle par exemple de 50 degrez, appliquez le diametre du Tranſporteur ſur la ligne donnée AV, en ſorte que ſon centre réponde exactement ſur le point donné A, & l'Inſtrument demeurant ainſi arrêté, comptez depuis l'extremité C de ſon diametre les 50 degrez propoſez, & là où ils ſe termineront, marquez le point L, par lequel & par le point donné A, vous tirerez la droite ALX, qui ſera avec la propoſée AV, l'angle VAX, de 50 degrez.

Si le point A eſt donné ſur la terre, ſervez-vous du Graphometre, & le placez en telle ſorte qu'il ait une ſituation à peu prés parallele à la ligne donnée AV, que ſon centre réponde perpendiculairement au point donné A, & que ſon diametre BC réponde ſur la ligne AV, ce qui arrivera lorſqu'en regardant par les Pinnules immobiles, vous verrez quelque point de la ligne AV. Aprés cela l'Inſtrument étant ainſi arrêté, & l'Alidade étant tournée ſur le point L de 50 degrez, puiſqu'il s'agit d'un angle de 50 degrez, faites planter un piquet ſur la terre, en un point comme X, qui ſoit dans la ligne viſuelle tirée par les pinnules de l'Alidade, c'eſt à dire en ſorte que ce piquet étant planté bien droit ſe puiſſe appercevoir en regardant par les fentes des deux pinnules de l'Ali-

l'Alidade ; & alors la ligne qu'on s'imaginera par le point X, & par le point donné A, fera avec la donnée AV, un angle de 50 degrez, comme il étoit proposé. Planche 1. 7. Fig.

On peut aussi au moyen de la Table precedente faire sur la terre un angle tel que l'on voudra en un point donné sur une ligne donnée, comme si au point A de la ligne donnée AV, on veut faire avec la même ligne AV, un angle par exemple de 56 degrez, comptez 30 pieds sur cette ligne AV, depuis A en Y, pour y planter un piquet, auquel vous attacherez un cordeau long de 28 pieds & 2 pouces, telle qu'on trouve dans la Table precedente la base d'un angle de 56 degrez. Vous planterez aussi au point A un piquet, pour y attacher un cordeau égal à la ligne AY, c'est à dire long de 30 pieds. Enfin vous assemblerez les extremitez de ces deux cordeaux attachez à leurs piquets, en les étendant de telle sorte que chacun soit également tendu ; & vous planterez un piquet là où les deux extremitez jointes ensemble se rencontreront sur la terre, comme est Z : & alors la ligne imaginaire AZ, fera avec la proposée AV, laquelle souvent n'est aussi qu'imaginaire, un angle de 56 degrez, comme il étoit proposé.

La même Table servira aussi pour faire sur le papier le même angle de 56 degrez, ou de telle autre grandeur que l'on voudra, sçavoir en faisant du point donné A, l'arc de cercle YZ, à l'intervale de 30 parties égales prises sur quelque échelle, & en portant sur cet arc la ligne YZ de 28 parties égales prises sur la même échelle, telle qu'est la base d'un angle de 56 degrez, pour avoir le point Z, par lequel & par le point donné A, on pourra tirer la ligne AZX, qui fera avec la proposée AV, l'angle VAX de 56 degrez.

Mais le Compas de proportion peut servir aussi tres-commodément pour faire sur le papier un angle d'autant de degrez que l'on voudra, comme par exemple de 50 degrez, en cette sorte. Décrivez du point donné A, l'arc de cercle YZ, avec une ouverture volontaire du compas, que vous porterez sur les deux lignes des cordes du Compas de proportion, de part & d'autre de 60 à 60 en sorte que le Compas de proportion soit tellement ouvert, que la distance de 60 à 60 soit égale au demi-diametre AY : & le Compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez sur les mêmes cordes avec un compas commun la distance de 50 à 50, puisque l'on veut un angle de 50 degrez, & la portez sur l'arc YZ, depuis Y en Z, & l'arc YZ sera de 50 degrez, c'est pourquoy en tirant la ligne AZX, l'angle VAX sera de 50 degrez.

On peut aussi faire sur la terre un angle d'autant de degrez

Planche 1. 7. Fig. degrez que l'on voudra par le moyen du Compas de proportion, lequel pour cette fin doit avoir deux pinnules élevées à angles droits sur chaque ligne des cordes, pour conduire les rayons visuels, ausquels on peut faire faire un angle tel que l'on voudra, en ouvrant le Compas de proportion, en telle sorte que les deux lignes des cordes fassent ce même angle au centre du Compas de proportion, qui doit répondre au point donné sur la terre: ce qui se fera en prenant depuis ce centre sur l'une des deux lignes des cordes la distance ou la corde correspondante au nombre des degrez proposez, & en appliquant la longueur de cette corde sur les mêmes lignes des cordes, de part & d'autre de 60 à 60; car ainsi le Compas de proportion se trouvera ouvert comme l'on demande. Voyez nôtre *Traité de l'Usage du Compas de proportion.*

PROBLEME X.

Faire en un point donné d'une ligne donnée un angle égal à un angle donné.

8. Fig. POur faire au point A de la ligne donnée AB, un angle égal au donné C, décrivez de cet angle C, avec une ouverture volontaire du compas l'arc de cercle DE, & avec la même ouverture décrivez du point donné A, l'arc de cercle FG, égal au premier DE, pour avoir le point G, par lequel & par le point donné A, vous tirerez la droite AGH, qui fera l'angle BAH égal au proposé C.

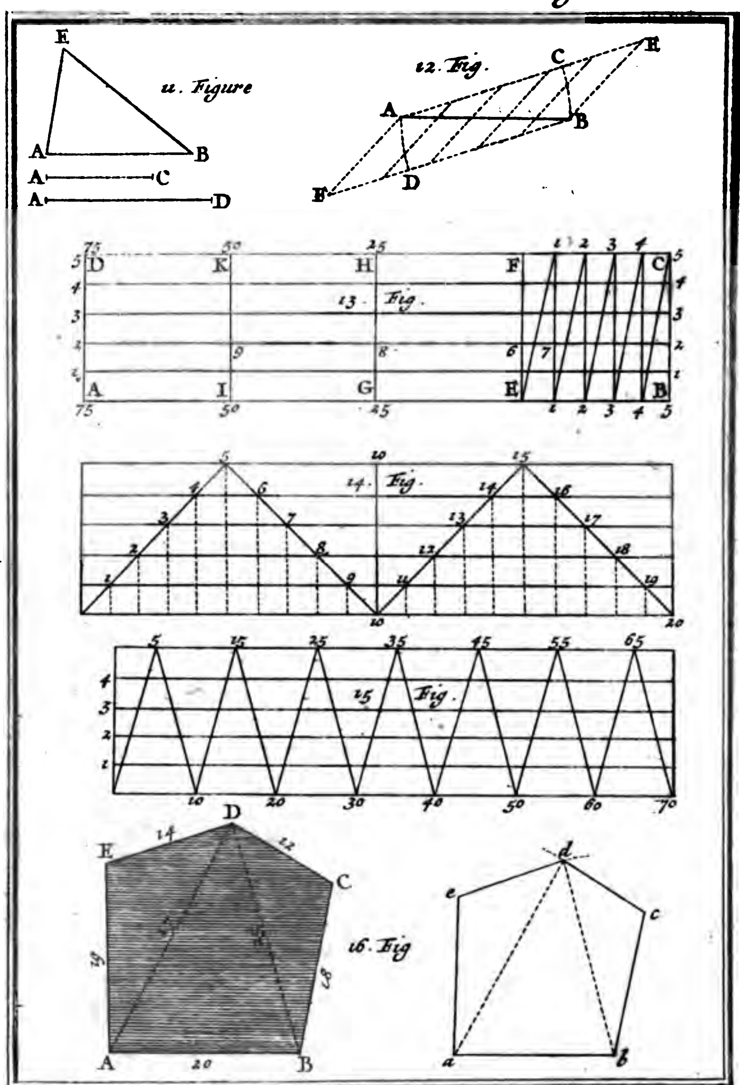
Quand on travaille sur la terre, il faut par *Prob.* 8. mesurer de combien de degrez est l'angle proposé C, & par *Probl.* 9. faire au point donné A, l'angle BAH d'autant de degrez qu'on aura trouvé l'angle C, car ainsi ces deux angles seront égaux, & le Problême sera resolu.

PROBLEME XI.

Décrire sur une ligne donnée un triangle isoscéle.

9. Fig. POur décrire sur la ligne donnée AB un triangle isoscéle, décrivez de ses deux extremitez A, B, avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, & par le point C de section, tirez aux deux mêmes extremitez A, B, les droites AC, BC, & le triangle ABC sera isoscéle, & il deviendra équilateral, lorsque les deux arcs de cercle auront été décrits avec une ouverture du compas égale à la ligne proposée AB.

On



11. Figure
12. Fig.
13. Fig.
14. Fig.
15 Fig.
16. Fig.

On travaillera de la même façon, quand la ligne AB se-ra donnée sur la terre, sçavoir en attachant aux deux extre-mitez A, B, deux cordeaux d'une même longueur, pour dé-crire à leur moyen deux arcs de cercle, ou bien si l'on ne peut pas commodément décrire ces deux arcs, en joignant les bouts de ces deux cordeaux également tendus, pour avoir le sommet C du triangle qu'on cherche. Planche I. 9. Fig.

PROBLEME XII.

Décrire de deux lignes données un Parallelogramme.

POur décrire un Parallelogramme des deux lignes données, AB, AC, c'est à dire dont la largeur soit égale à la ligne donnée AB, & la longueur égale à la ligne donnée AC, faites de ces deux lignes données AB, AC, un angle quelconque BAC. Décrivez de l'extremité B, à l'inter-valle de AC, un arc de cercle, & un autre de l'extremité C, à l'ouverture de AB, lequel coupe icy le premier au point D, d'où vous tirerez aux deux points B, C, les droites CD, BD, & le Parallelogramme ABDC sera celuy qu'on cherche. 10. Fig.

C'est à peu prés de la même façon que l'on travaillera sur la terre, lorsque la longueur & la position des deux li-gnes AB, AC, sera donnée, sçavoir en attachant au point C un cordeau égal à la largeur AB, & au point B un autre cordeau égal à longueur AC, & en joignant ensemble les bouts de ces deux cordeaux également tendus, pour avoir le point D, &c.

PROBLEME XIII.

Décrire un triangle de trois lignes données.

POur décrire un triangle de trois lignes données AB, AC, AD, dont la plus grande doit être moindre que la som-me des deux autres, décrivez de l'extremité A de la premie-re ligne donnée AB, à l'ouverture de la seconde ligne don-née AC, un arc de cercle, & un autre de l'autre extremité B, à l'intervale de la troisiéme ligne donnée AD; & par le point E de la section de ces deux arcs, tirez aux mêmes ex-tremitez A, B, les droites AE, BE, & le triangle ABE se-ra celuy qu'on cherche. Planche 2. 11. Fig.

Quand on travaillera sur la terre, on attachera à l'extre-mité A de la premiere ligne donnée AB, un cordeau égal à la seconde AC, & à l'autre extremité B, un autre cordeau égal

Planche 2. 11. Fig. égal à la troisiéme AD, & l'on joindra ensemble les bouts de ces deux cordeaux également tendus, qui donneront le point E, &c.

PROBLEME XIV.

Diviser une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra.

12. Fig. POur diviser la ligne donnée AB en cinq parties égales par exemple, décrivez de l'extremité A, par l'autre extremité B, l'arc de cercle BC, & de l'extremité B, par l'extremité A, l'arc de cercle AD, égal au precedent BC, qui peut être de telle grandeur que l'on voudra, & menez des deux extremitez A, B, par les points C, D, les lignes indéfinies ACE, BDF, qui seront finies en E & en F, en parcourant sur chacune depuis les deux extremitez A, B, cinq parties égales d'une grandeur volontaire, mais égale sur l'une & l'autre ligne. Enfin tirez par les points de division opposez des lignes paralleles entre elles, qui diviseront la ligne donnée AB, en cinq parties égales, comme il étoit proposé.

Si vous voulez vous servir du Compas de proportion, appliquez la longueur de la ligne proposée AB, sur la ligne des parties égales à un nombre de part & d'autre, qui soit divisible par cinq, puisqu'il s'agit de diviser la ligne AB, en cinq parties égales, comme de 200 à 200, dont la cinquiéme partie est 40: & le Compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez avec un compas commun sur la même ligne des parties égales, la distance de 40 à 40, qui sera la cinquiéme partie de la ligne donnée AB. Nous enseignerons à la *Prop.* 1. *l.* 1. *des Elemens d'Euclide*, une autre methode pour diviser une ligne donnée en parties égales.

PROBLEME XV.

Construire une Echelle propre à lever des Plans.

13. Fig. AYant tiré les deux lignes indéfinies AB, BC, faisant au point B, un angle quelconque ABC parcourez sur la ligne BC, autant de parties égales qu'il vous plaira, d'une longueur volontaire, comme par exemple cinq, depuis B en C. Faites en autant sur la ligne AB, depuis B en E, & encore autant sur la ligne CD, qui doit être tirée par le point C, parallelement à la ligne AB, depuis C en F, & joi-

joignez tous les points de division opposez & également éloignez de la ligne BC, par autant de lignes droites, qui seront paralleles entre elles & à la ligne BC, & qui diviseront le Parallelogramme BCFE en autant d'autres petits Parallelogrammes, dont on tirera toutes les diagonales d'un même sens, lesquelles alors seront paralleles entre elles. Planche 2. 13. Fig.

Il n'est pas necessaire que le nombre des divisions de la ligne BE soit égal au nombre des divisions de la ligne BC, car il peut être plus grand, ou plus petit, mais il doit être égal au nombre des parties égales de sa ligne opposée & parallele CF, dont la longueur par consequent est égale à celle de BE, & chacune doit être parcouruë autant de fois que l'on voudra en ligne droite, comme CF trois fois par exemple aux points H, K, D, & BE aussi trois fois aux points G, I, A, que l'on joindra avec leurs opposez H, K, D, par les lignes paralleles GH, IK, AD, dont la derniere AD doit être divisée en autant de parties égales que son égale & parallele opposée BC, c'est à dire que les mêmes parties égales, qui ont été parcouruës sur la ligne BC, se doivent parcourir sur la ligne AD, pour tirer des lignes droites & paralleles par les points opposez & également éloignez des deux paralleles AB, CD; & l'Echelle sera parfaite, à laquelle on ajoûtera les nombres de 25 à 25, sur les paralleles, AB, CD, pour signifier que chacune des parties EG, EB, GI, & AI, comprend 25 parties égales, lequel nombre 25 se trouve en multipliant le nombre des parties égales de la ligne BE, par le nombre des parties égales de la ligne BC, lesquelles font que chaque diagonale se trouve divisée en autant de parties égales que la ligne BC, comme icy en cinq, en des points; par lesquels si l'on tiroit autant de lignes paralleles à la ligne BC, elles diviseroient chacune des parties égales de la ligne BE aussi en cinq parties égales plus petites, lesquelles se trouvent sur les grandes lignes paralleles à la ligne AB, sçavoir une sur la premiere parallele 1, 1, depuis la ligne EF, jusqu'à la plus proche diagonale: deux sur la seconde parallele 2, 2, entre la même ligne EF & la premiere diagonale, c'est à dire entre les points 6, 7: ainsi des autres. D'où il suit que la ligne 8, 7, contient 27 parties égales, que la ligne 9, 7, en comprend 52, lesquelles representent des pieds, des toises, ou telle autre mesure que l'on voudra.

Cette Echelle ainsi construite s'appelle *Echelle libre*, parce qu'il est libre d'y prendre les divisions de telle grandeur que l'on voudra, puisque sa longueur n'est point déterminée: mais quand sa longueur est donnée, & aussi le nombre de ses parties égales, on la nomme *Echelle contrainte*, qu'il ne

Planche 2. 13. Fig. ne sera pas difficile de construire à celuy qui aura compris la construction de la precedente, car si la longueur AB est déterminée, & d'un nombre déterminé de mesures, comme par exemple de 100 toises : parce que ce nombre 100 est divisible par 4, on divisera la longueur AB en quatre parties égales aux points E, G, I, dont chacune representera 25 toises: & parce que ce nombre 25 est divisible par 5, on divisera la partie EF en cinq parties égales, dont chacune representera cinq toises, parce qu'en divisant 25 par 5, le quotient est 5; c'est pourquoy pour avoir une toise, on tirera à volonté par l'extremité B, la ligne indeterminée BC, pour y parcourir cinq parties égales d'une grandeur volontaire depuis B en C, aprés quoy le reste s'achevera comme auparavant.

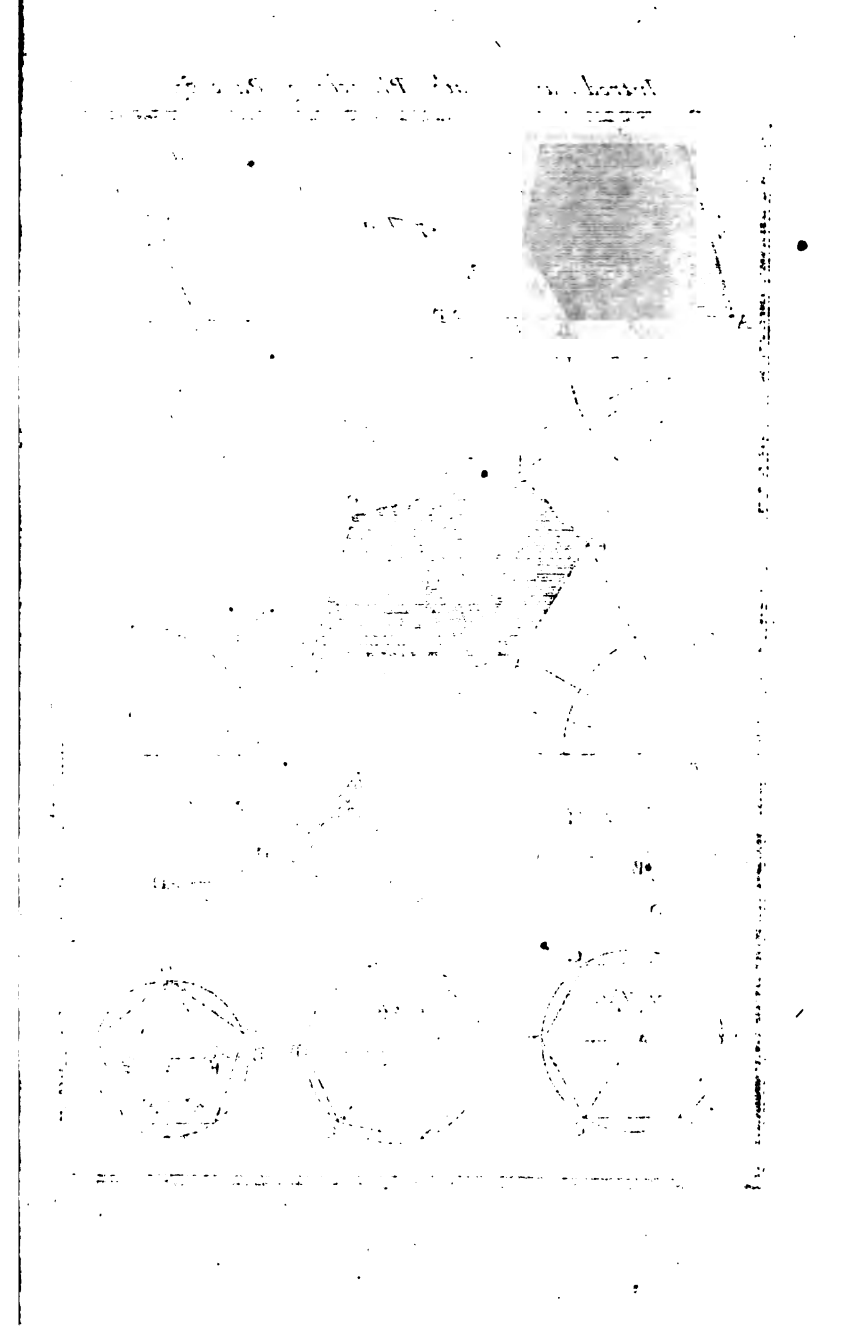
On peut sur ce principe construire une semblable Echelle en plusieurs façons differentes, comme vous voyez dans la 14. *Fig.* qui est une Echelle de 20 parties égales, & dans la 15. *Fig.* qui est une Echelle de 70 parties égales, que l'on peut prendre pour des toises, des pieds, des pouces, & pour telle autre mesure que l'on voudra. Il ne faut que regarder ces trois figures pour les comprendre, c'est pourquoy je n'en parleray pas davantage: je diray seulement que si dans la 13. *Fig.* on avoit parcouru sur la ligne BC six parties égales, chaque division de la ligne EB auroit pû être prise pour une toise, & chaque soûdivision auroit representé des pieds, parce qu'une toise a six pieds, de sorte que la ligne 6, 7, eût representé 2 pieds, & la ligne 8, 7, eût representé 5 toises & 2 pieds, & enfin toute la ligne AB eût été de 20 toises.

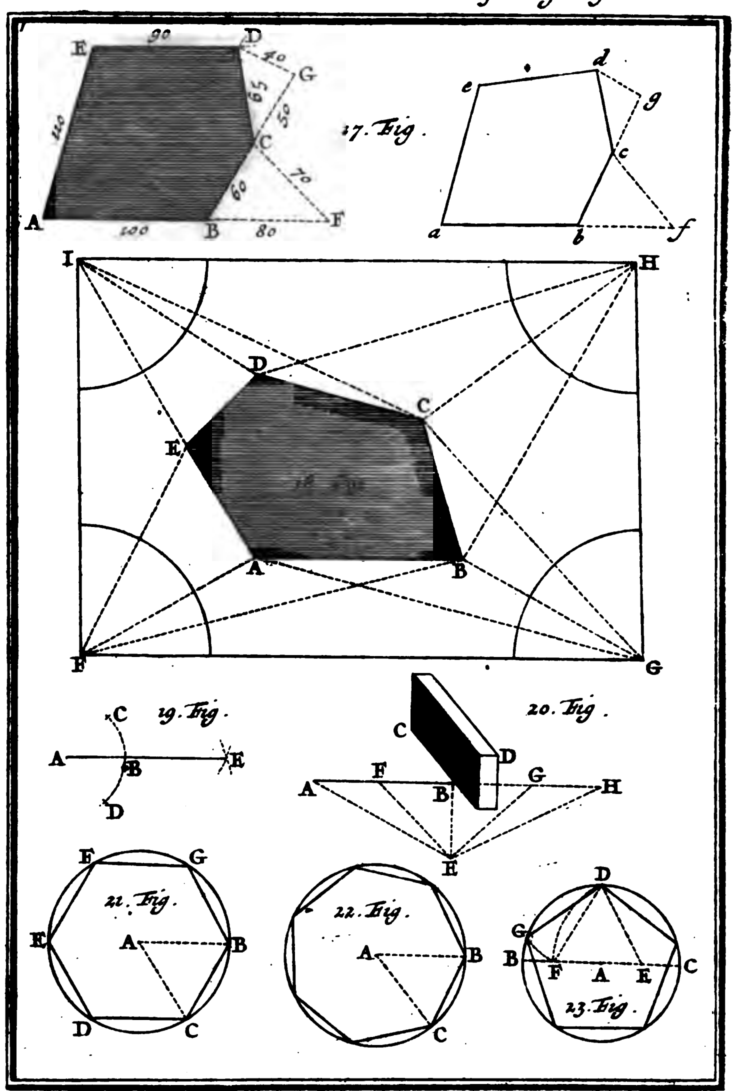
PROBLEME XVI.

Lever un Plan accessible sur la terre.

16. Fig. PRemierement si l'on peut entrer au dedans de la Place accessible, comme ABCDE, on en fera un broüillon sur le papier pour y écrire la longueur en pieds ou en toises de chaque côté, que nous supposerons d'autant de toises que vous la voyez marquée dans la Figure, aussi bien que celle des diagonales AD, BD, qu'il est libre de tirer comme l'on voudra d'un angle à l'autre, afin que le Plan proposé se trouve reduit en triangles, que l'on racourcira l'un aprés l'autre, en prenant chaque ligne d'autant de parties égales prises sur une Echelle, qu'elle aura de toises sur le terrain, car ainsi toute la Figure se trouvera réduite en petit volume sur le papier, & le Plan sera levé.

Mais pour venir à la pratique, tirez sur le papier la ligne




17. Fig.
19. Fig.
20. Fig.
21. Fig.
22. Fig.
23. Fig.

ab de 20 parties prises sur l'Echelle, pour les 20 toises du côté AB. Aprés cela décrivez du point *b*; à l'ouverture de 25 parties, pour les 25 toises du côté BD du triangle ABD, un arc de cercle, & un autre du point *a*, à l'intervalle de 27 parties, pour les 27 toises de l'autre côté AD, du même triangle ABD, & par l'intersection *d* de ces deux arcs, tirez aux deux points *a*, *b*, les droites *ad*, *bd*, qui feront avec la premiere *ab*, le triangle *abd* semblable au grand ABD, lequel de cette façon se trouvera racourci. C'est de la même maniere que l'on racourcira les deux autres triangles BCD, AED, pour avoir ainsi la petite figure *abcde* semblable à la grande ABCDE. Planche 3. 16. Fig.

Si le Plan proposé est borné par quelques lignes courbes, on prendra ces lignes courbes pour droites, quand il y aura peu de difference: autrement on les rendra comme insensibles par plusieurs petites lignes droites que l'on formera auprés du bord de la figure, pour la partager en triangles par plusieurs diagonales, & pour racourcir ces triangles, & par consequent la figure proposée comme il vient d'être enseigné.

Secondement s'il n'est pas permis d'aller au dedans de la figure, en sorte qu'on ne puisse pas mesurer les diagonales, comme si le Plan proposé étoit fermé de murailles, ou que ce fût un Bois, ou bien une place marécageuse, on levera ce Plan par le dehors; en mesurant comme auparavant, les côtez avec un cordeau ou mieux avec une chaîne, & les angles avec un Graphometre, ou autrement, comme il a été enseigné au *Probl.* 8 aprés quoy on racourcira ce Plan sur le papier, en prenant ses côtez d'autant de parties égales prises sur l'Echelle qu'ils auront de toises, & en faisant avec un Transporteur, ou autrement, comme il a été enseigné au *Probl.* 9. ses angles tels qu'on les aura trouvé sur le terrain: car ainsi ces deux figures, la grande sur le terrain, & la petite sur le papier, seront semblables, à cause de l'égalité de leurs angles, & de la proportion de leurs côtez. 17. Fig.

Mais comme il est aisé de manquer, tant en prenant les angles sur la terre, qu'en les décrivant sur le papier, & qu'une petite erreur à l'égard des angles apporte une difference considerable; il vaudra mieux se servir de la methode suivante, qui m'a toûjours bien réüssi, lorsque j'ay pris un peu de soin à bien prolonger les côtez en ligne droite.

Proposons donc le Plan ABCDE, qui soit seulement accessible par le dehors, ce qui n'empêchera pas qu'on n'en puisse mesurer les côtez, que nous supposerons d'autant de pieds que vous les voyez marquez dans la Figure. Prolongez l'un des côtez, comme AB, en F, autant en ligne droite qu'il vous sera possible, en sorte que BF soit d'une certaine

Planche 3. Fig. 17. grandeur connuë, plus ou moins selon la commodité du terrain, comme par exemple de 80 pieds, prenant plûtot des pieds que des toises, parce que la mesure des côtez du Plan a été faite en pieds, & mesurez la ligne FC, que nous supposerons de 70 pieds, ce qui se doit ainsi faire, parce que cette ligne fait avec les deux autres BF, BC, le triangle BFC, lequel étant racourci par le moyen d'une Echelle particuliere, à laquelle peut suppléer le Compas de proportion, en prenant les mesures sur les deux lignes des parties égales de part & d'autre, lorsque le Compas de proportion est plus ou moins ouvert, selon que l'on veut faire sur le papier une figure plus grande ou plus petite, donnera la position du côté BC, ce qui ne se pourroit pas faire autrement sans connoître l'angle ABC, où il est plus difficile de bien réüssir.

Prolongez de la même façon le côté BC en G, en sorte que CG soit d'une grandeur arbitraire, comme de 50 pieds, & mesurez pareillement la ligne GD, que nous supposerons de 40 pieds, ce qui donnera la position du côté CD, sans connoître l'angle BCD : & comme il ne reste plus que les deux côtez AF, DE, on s'arrêtera là, parce que cela suffit pour representer ce Plan sur le papier en cette sorte.

Ayant tiré la ligne *ab* de 100 parties sur l'Echelle, pour les 100 pieds du grand côté AB, & l'ayant prolongé en *f*, en sorte que *bf* soit de 80 des mêmes parties, pour les 80 pieds de la ligne BF; faites un arc de cercle du point *f*, à l'ouverture de 70 parties, pour les 70 pieds de la ligne FC, & un autre du point b, à l'ouverture de 60 parties, pour les 60 pieds du côté BC, & par le point *c* de la section de ces deux arcs, tirez au point *b*, le côté *bc*, que vous prolongerez en *g*, en sorte que *cg* soit de 50 parties, pour les 50 pieds de la ligne CG, & décrivez comme auparavant un arc de cercle du point *g*, à l'intervalle de 40 parties, pour les 40 pieds de la ligne GD, & un autre du point *c*, à l'ouverture de 60 parties, pour les 60 pieds du côté CD, & par la section *d* de ces deux arcs, tirez au point *c*, le côté *cd*. Enfin décrivez un arc de cercle du point *d*, à l'ouverture de 90 parties, pour les 90 pieds du côté DE, & un autre du point *a*, l'ouverture de 100 parties, pour les 100 pieds du dernier côté AE, & par la section *e*, de ces deux arcs, tirez aux deux points *a*, *d*, les deux côtez *ae*, *de*, & la petite figure *abcde*, sera semblable à la grande ABCDE. *Voyez Probl. 5. chapit. 2. Part. 3. Geom.*

PRO-

PROBLEME XVII.

Lever un Plan inacceſſible ſur la terre.

SI le Plan ABCDE eſt inacceſſible, en ſorte que l'on ne puiſſe pas meſurer avec la chaîne la longueur de ſes côtez, & encore moins les prolonger en dehors, ni connoître la quantité de ſes angles, on tracera tout autour la figure FGHI, le plus proche de la Place qu'il ſera poſſible, & la plus reguliere que l'on pourra, enſorte que les angles du Plan propoſé, qui pourront être vûs de l'un des angles de la figure circonſcrite, ſe puiſſent auſſi voir d'un autre angle de la même figure, ce qui arrive icy, car l'angle A eſt vû des deux angles F, G, auſſi-bien que l'angle B: l'angle C eſt vû des deux angles G, H, & auſſi des deux H, I, qui voyent encore l'angle D: & enfin l'angle E eſt vû des deux angles F, I. Planche 3. Fig. 18.

Cela étant ſuppoſé; on meſurera avec la chaîne les côtez de la Figure FGHI, & avec le Graphometre ou Demi-cercle les angles viſuels, qui ſe forment aux points F, G, H, I: aprés quoy il n'y aura plus qu'à décrire ſur le papier une petite figure ſemblable à la grande FGHI, & faire à ſes angles F, G, H, I, des angles égaux à ceux qui auront été trouvez ſur le terrain, par des lignes droites, qui repreſenteront les rayons viſuels, & s'entrecouperont en des points, qui repreſenteront les angles du Plan propoſé ABCDE, lequel de cette façon ſe trouvera racourci, & réduit en petit volume ſur le papier, en joignant par des lignes droites les points de ſection de tous ces rayons viſuels. La figure le démontre aſſez, ſans qu'il ſoit beſoin d'un plus long diſcours.

PROBLEME XVIII.

Prolonger une ligne trop courte.

QUoique ce Problême ſoit naturellement connu, & qu'Euclide le prenne pour un Principe, neanmoins dans la pratique il eſt difficile de le bien executer par l'application de la regle, lorſque la ligne propoſée eſt petite, parce que pour peu que l'on manque en appliquant la regle ſur une petite étenduë, on s'éloigne ſenſiblement de la ligne droite dans une longue étenduë. Il faut donc avoir un point plus éloigné de l'une des deux extremitez de la ligne Fig. 19.

 don-

Planche 3. 19. Fig. donnée que ne sont ces deux extremitez l'une de l'autre, qui soit en ligne droite avec les deux mêmes extremitez, pour y appliquer la regle, & ainsi prolonger la ligne proposée avec plus d'exactitude.

Pour trouver ce point, décrivez de l'extremité A, de la ligne proposée AB, par l'autre extremité B, l'arc de cercle CBD, pour y prendre à discretion les deux arcs égaux BC, BD, & décrivez des deux extremitez C, D, avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, dont le point E de section sera en ligne droite avec les deux extremitez A, B; c'est pourquoy si on applique la regle sur les deux points A, E, on pourra prolonger plus exactement la ligne donnée AB.

Si la ligne AB est donnée sur la terre, on plantera deux piquets bien à plomb aux extremitez A, B, & l'on fera planter un troisiéme piquet au delà de B, si l'on veut prolonger la ligne AB de ce côté, à quelque distance considerable, comme en E, en sorte qu'en regardant par les deux piquets plantez aux points A, B, on apperçoive le troisiéme piquet planté en E, car ainsi ces trois piquets se trouveront en ligne droite, parce qu'ils seront dans un même rayon visuel, qui est toûjours une ligne droite, pour le moins quand il n'est pas d'une longueur énorme.

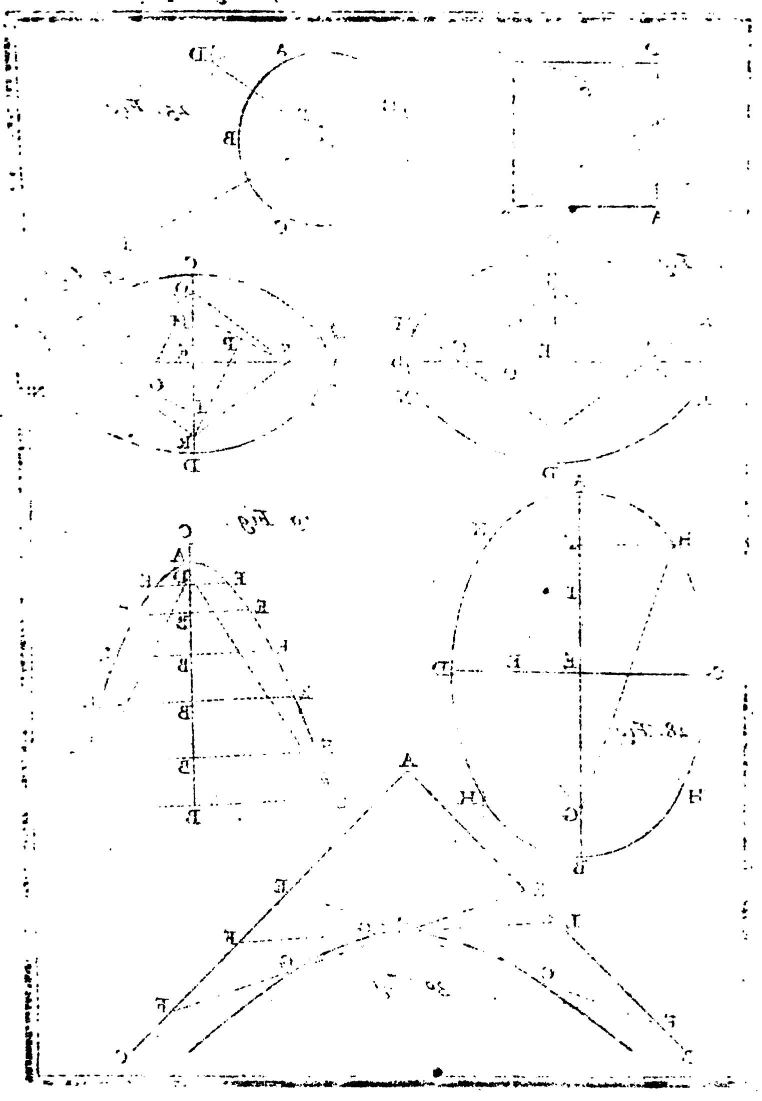
20. Fig. On ne peut pas travailler de la même façon, quand il y a quelque empêchement, tel qu'est icy la muraille CD. Dans ce cas on fera au point B, l'angle droit ABE, par la ligne BE, d'une longueur volontaire, & ayant tiré de son extremité E, par les deux points A, F, pris à discretion sur la ligne AB, les droites EA, EF, on mesurera les angles BEF, BEA, & les lignes EF, EA. Aprés cela on fera de l'autre côté l'angle BEG, égal à l'angle BEF, par la ligne EG, qui doit être égale à la ligne BF: & l'angle BEH égal à l'angle BEA, par la ligne EH, qui doit être égal à la ligne EA; aprés quoy on pourra continuer la ligne proposée AB, au delà de la muraille CD, en joignant les deux points, G, H, par une ligne droite, &c.

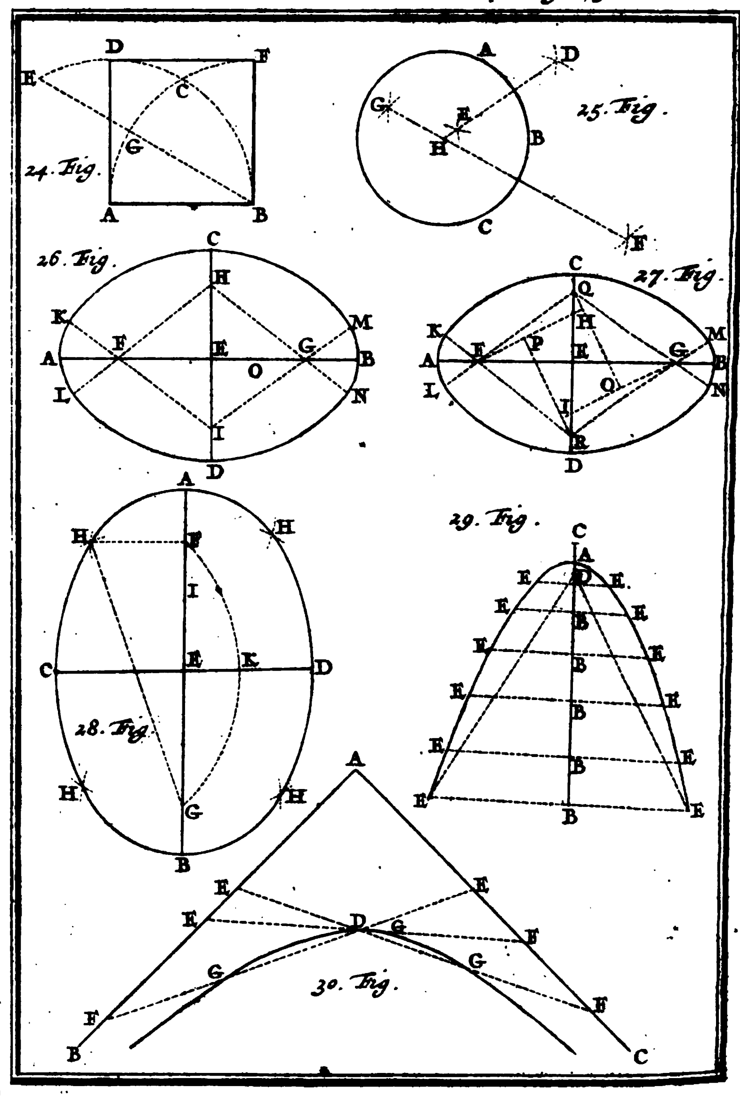
PROBLEME XIX.

Inscrire un Polygone regulier dans un cercle donné.

21. Fig. PRemierement si l'on veut décrire un Exagone dans le cercle donné BCDEFG, dont le centre est A; le rayon AB étant porté sur la circonference, s'y rencontrera six fois exactement, & ainsi donnera le côté de l'Exagone.

Mais




24. Fig.
25. Fig.
26. Fig.
27. Fig.
28. Fig.
29. Fig.
30. Fig.

Mais si l'on y veut décrire quelque autre Polygone régulier, comme par exemple un Eptagone, on fera au centre A, avec le rayon AB, l'Angle BAC égal à l'angle du centre, qui dans l'Eptagone est de 51 degrez & d'environ 26 minutes, & la corde BC sera le côté de l'Eptagone. Planche 3. 22. Fig.

L'Angle du centre d'un Polygone regulier se trouve en divisant 360 degrez par le nombre des côtez du Polygone, comme par 7 pour un Eptagone, par 8 pour un Octogone, & ainsi ensuite.

Si vous avez un Compas de proportion, appliquez la longueur du rayon AB, de 6 à 6, sur la ligne des Polygones, & le Compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez sur la même ligne des Polygones, de part & d'autre la distance de 7 à 7 pour un Eptagone, de 8 à 8 pour un octogone, & ainsi ensuite: & cette distance sera le côté du Polygone qu'on cherche. Voyez le Traité que nous avons publié *de l'Usage du Compas de Proportion.*

SCOLIE.

Il est évident que pour inscrire dans un cercle donné un triangle équilateral, il n'y a qu'à porter son rayon six fois sur sa circonference, & tirer les côtez de deux en deux points, en en laissant un entre-deux; & que pour y inscrire un Quarré, il n'y a qu'à tirer par le centre du cercle donné deux diametres perpendiculaires entre eux, qui diviseront le cercle donné en quatre parties égales.

Mais pour y inscrire un Pentagone, suivez cette regle particuliere, qui a sa demonstration. Tirez à volonté par le centre A, le diametre BC, & luy élevez du même centre A, le rayon perpendiculaire AD. Divisez le rayon AC, en deux également au point E, & menez la droite DE, dont la longueur doit être portée sur le diametre BC, depuis E en F. Enfin menez la droite DF, & en portez la longueur sur la circonference du cercle depuis D en G, & la corde DG sera le côté du Pentagone inscriptible dans le cercle DGC. Vous remarquerez que la ligne AF est le côté du Decagone regulier inscriptible au même cercle. 23. Fig.

PROBLEME XX.

Décrire un Quarré sur une ligne donnée.

POur faire un Quarré sur la ligne donnée AB, décrivez du point A, par le point B, l'arc de cercle BCDE, & du point B, par le point A, l'arc de cercle AGCF; portez la même ouverture du compas sur l'arc BCDE, depuis C en E, Planche 4. 24. Fig.

Planche 4. 24. Fig. c'est à dire faites l'arc CE égal à l'arc BC, & menez la droite BE, qui divisera l'arc AC en deux également au point G. Enfin faites les arcs CD, CF, égaux chacun à l'arc CG, ou AG, & joignez les droites AD, DF, BF, & la figure ABFD, sera le Quarré qu'on cherche.

Ou bien tirez à la ligne AB la perpendiculaire & égale AD, & décrivez un arc de cercle du point D, avec l'ouverture de AD, ou AB, & avec la même ouverture décrivez du point B, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point F, par où vous tirerez les droites FB, FD, &c.

PROBLEME XXI.

Décrire sur une ligne donnée un Polygone regulier.

Planche 3. 22. Fig. POur décrire sur la ligne donnée BC, un Polygone regulier, comme par exemple un Eptagone, faites aux deux extremitez B, C, de la ligne BC, les angles BCA, CBA, égaux chacun à la moitié de l'angle du Polygone, laquelle se trouvera icy de 64 degrez & 17 minutes, & du point A, où les deux lignes égales AB, AC, se rencontrent, décrivez par les deux points B, C, une circonference de cercle, dans lequel on pourra inscrire un Eptagone regulier, dont chaque côté sera égal à la ligne donnée BC.

L'Angle d'un Polygone se trouve en ôtant de 180 degrez l'angle du centre, lequel on trouve comme il a été enseigné au Problême precedent: ou bien sans connoître l'angle du centre, en multipliant 180 degrez par le nombre des côtez du Polygone moins 2, sçavoir par 5 pour un Eptagone, par 6 pour un Octogone, & ainsi en suite, & en divisant le produit par le nombre des côtez du Polygone.

Si vous avez un Compas de proportion, appliquez la longueur de la ligne donnée BC, sur la ligne des Polygones, à un nombre de part & d'autre égal au nombre des côtez du Polygone qu'on veut décrire, comme icy de 7 à 7: & le Compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez avec un compas commun la distance de 6 à 6 sur la même ligne des Polygones, & décrivez avec cette ouverture des deux extremitez B, C. de la ligne donnée BC, deux arcs de cercle, dont l'intersection donnera le centre A d'un cercle, dans lequel on pourra inscrire le Polygone proposé, comme icy un Eptagone regulier, dont la ligne donnée BC sera l'un des côtez.

PRO-

PROBLEME XXII.

Faire passer une circonference de cercle par trois points donnez sur un Plan.

IL ne faut pas que les trois points donnez fassent une ligne droite, autrement le Problême seroit impossible. Pour donc décrire un cercle par les trois points donnez A, B, C, qui ne sont pas en ligne droite, décrivez des deux points A, B, de part & d'autre avec une même ouverture du compas deux arcs de cercle, & par leurs points E, D, de section, tirez la droite indefinie DEH. Décrivez aussi des deux points B, C, de part & d'autre avec une même ouverture du compas, deux arcs de cercle, qui se coupent icy aux deux points F, G, par lesquels vous tirerez la droite FG, laquelle étant prolongée quand il en sera besoin, coupera la premiere DE aussi prolongée, en un point, comme H, qui sera le centre d'un cercle, dont la circonference passera par les trois points donnez A, B, C. Planche 4. 25. Fig.

SCOLIE.

C'est de cette façon que l'on achevera un cercle qui n'est que commencé, sçavoir en prenant à discretion trois points sur cet arc, & en trouvant le centre d'un cercle, qui passe par ces trois points.

PROBLEME XXIII.

Autour de deux diametres donnez, décrire une Ovale commune.

POur décrire une Ovale commune autour des deux diametres donnez A B, CD, qui se coupent à angles droits & en deux également au point E, où sera le centre de l'Ovale; portez la longueur du petit diametre CD, sur le grand AB, depuis A en O, & prenez sur le même grand diametre AB, les lignes EF, EG, égales chacune à BO, & sur le petit CD, les lignes E H, EI, égales chacune aux trois quarts de BO, c'est à dire de EF, ou de EG. Aprés cela tirez des points H, I, par les points F, G, les droites indéfinies IK, IM, HL, HN, qui se trouveront finies aux points K, L, M, N, en décrivant du point F, par le point A, l'arc de cercle KAL & du point G par le point B, l'arc de cercle MBN. Enfin 26. Fig.

 décri-

Planche 4. 26. Fig. décrivez du point H, par les deux points L, N, l'arc de cercle LDN, qui passera par le point D: & du point I, par les points K, M, l'arc de cercle KCM, qui passera par le point C; & vous aurez l'Ovale parfaite ACBD.

27. Fig. On peut encore décrire une semblable Ovale tres-facilement en cette sorte. Prenez sur les deux diametres donnez AB, CD, les lignes égales AF, BG, CH, DI, d'une longueur volontaire, & joignez les droites FH, GI, dont chacune sera divisée en deux également aux points, O, P, par où on leur tirera les deux perpendiculaires OQ, PR, qui coupent icy le diametre CD, aux deux points Q, R, par lesquels & par les deux points F, G, on tirera les droites indéfinies RK, RM, QL, QN, aprés quoy le reste s'achevera comme auparavant.

PROBLEME XXIV.

Décrire autour de deux Axes donnez une Ovale Mathematique.

L'Ovale que nous venons de décrire est appellée *commune*, pour la differencier de l'*Ovale Mathematique*, qu'on appelle communément *Ellipse*, & qui ne participe aucunement du cercle, étant produite par la section d'un Cylindre & d'un Plan, qui n'est pas perpendiculaire à l'axe du Cylindre, autrement la section feroit un cercle: ou bien par la section d'un Cone droit & d'un Plan, qui coupe deux côtez opposez du Cone, sans être parallele à la base du Cone, autrement la section feroit aussi un Cercle.

28. Fig. La ligne courbe ACBD represente la circonference d'une Ellipse, dont la principale proprieté est, que si de deux certains points F, G, pris sur le grand diametre AB, & également éloignez du centre E, lesquels on appelle *Foyers*, on tire à un point quelconque H de sa circonference, les droites FH, GH, leurs sommes FH+GH est égale au grand diametre AB, qu'on appelle *Grand Axe*, le petit diametre CD, qui luy est perpendiculaire, étant appellé *Petit Axe*, & le point E, où ces deux Axes s'entrecoupent, étant nommé *Centre de l'Ellipse*.

Comme cette ligne courbe ACBD n'est point circulaire, ni en tout, ni en partie, on ne la peut décrire geometriquement, qu'en en trouvant plusieurs points geometriquement, que l'on joindra adroitement par une ligne courbe continuë, qui déterminera l'Ellipse, ce qui se fera d'autant plus facilement que plus on aura trouvé de points bien proches les uns des autres.

Il y a plusieurs methodes pour trouver ces points, entre lesquelles j'ay choisi la suivante, qui me semble la meilleure de toutes pour la pratique, & qui tire son origine & sa demonstration de la proprieté precedente des Foyers F, G, qui se trouveront sur le grand Axe AB, en décrivant de l'extremité C, du petit CD, avec une ouverture du compas égale au grand demi-axe AE, ou BE, l'arc de cercle FKG, qui donnera sur le grand axe AB, les deux Foyers F, G, par le moyen desquels on trouvera une infinité de points de l'Ellipse, en cette sorte. Planche 4. 28. Fig.

Décrivez des Foyers F, G, avec une ouverture volontaire du compas, mais plus grande que AF, ou que BG de côté & d'autre de petits arcs de cercle, & ayant porté cette même ouverture sur le grand Axe AB, depuis A en I, décrivez des deux mêmes Foyers F, G, avec une ouverture du compas égale au reste BI du grand Axe AB, d'autres arcs de cercle, qui coupent icy les precedens aux quatre points H, qui seront de l'Ellipse. C'est de la même façon qu'en faisant des arcs de cercle plus grands ou plus petits des mêmes Foyers F, G, on trouvera tant d'autres points de l'Ellipse qu'on voudra, lesquels étant joints par une ligne courbe, l'Ellipse se trouvera décrite.

Quand on n'a point de compas, on peut trouver tant de points de l'Ellipse qu'on voudra, par le moyen de la seule Regle, sçavoir en transportant sur le bord de cette regle, depuis son extremité, la longueur du grand & du petit demi-axe, ce qui se fera sans compas, si on applique l'extremité de la regle au centre E, & le bord de la même regle sur chacun des deux demi-axes EB, EC, & que l'on marque sur le même bord deux points où les deux extremitez B, C, se termineront: & en appliquant ces deux points sur les deux Axes AB, CD, en sorte que le point du petit demi-axe réponde sur le grand Axe AB, & reciproquement le point du grand demi-axe sur le petit Axe CD, car alors la même extremité de la regle marquera un point de l'Ellipse; & comme cette application se peut faire en une infinité de manieres differentes, il est évident que par ce moyen on peut trouver tant de points differens de l'Ellipse qu'on voudra.

Cette methode a sa demonstration, & elle est le fondement d'un certain instrument, qui est assez commun, dont on se sert pour décrire une Ellipse tout d'un coup, comme l'on se sert du compas pour tracer un cercle. Mais on peut autrement & tres-facilement décrire une Ellipse tout d'un coup par une autre methode plus simple, qui dépend de la proprieté générale des Foyers, dont nous avons parlé auparavant, & qui est assez familiere parmi les Artisans.

Ayant

Planche 4. 28. Fig. Ayant trouvé les deux Foyers F, G, comme il été enseigné auparavant, attachez à ces deux Foyers F, G, une fisselle, ou un cordeau, dont la longueur soit égale à celle de l'Ellipse, c'est à dire au grand Axe donné AB : aprés quoy il n'y aura qu'à étendre cette fisselle ou cordeau avec une pointe, que l'on fera mouvoir le long du cordeau tendu également, & cette pointe décrira par son mouvement la circonference d'une Ellipse, dont les deux lignes données AB, CD, en seront les deux Axes, c'est à dire la longueur & la largeur. Ce cordeau est representé dans la figure par la ligne FHG.

PROBLEME XXV.

Décrire une Parabole sur un Axe donné.

29. Fig. La *Parabole* est la section d'un Cone & d'un Plan parallele à l'un des *côtez du Cone*, c'est à dire à une ligne droite tirée de la pointe du Cone par quelque point de la circonference de sa base, qui est un cercle. Cette Section ou Parabole est terminée par une ligne courbe appellée *ligne Parabolique*, & d'un terme général *Ligne Conique*, parce qu'une Ligne Conique est la section d'un Plan & d'une *Superficie Conique*, c'est à dire de la surface d'un Cone. Il est évident que cette Ligne Parabolique est une ligne courbe, & qu'elle va toûjours en s'élargissant, comme fait à peu prés une corde mal tenduë, ou bien un corps pesant, lequel étant jetté obliquement en l'air, décend environ avec la même obliquité, en parcourant une Ligne Parabolique.

La proprieté essentielle de la Parabole est, que si l'on tire au dedans de cette ligne tant de lignes paralleles entre elles que l'on voudra, comme EE, qui soient divisées en deux également aux points B, par la ligne droite AB, laquelle dans ce cas est appellée *Diametre de la Parabole*, & *Axe*, quand elle est perpendiculaire à ces paralleles qu'on appelle *Ordonnées* à l'égard du diametre AB, qui les divise chacune en deux également ; les quarrez de toutes ces ordonnées sont proportionnels aux parties correspondantes du diametre AB, en les prenant depuis l'extremité A, qu'on appelle *Sommet de la Parabole*. D'où l'on peut tirer une construction de la Parabole, mais elle ne sera pas si facile que celle qui se tire de la proprieté de son *Foyer* D, qui est un point de l'Axe AB, tel que si sur cet Axe AB, prolongé, on prend la partie AC égale à la partie AD, la partie CB est égale à la ligne correspondante DE. D'où l'on tire une maniere facile, pour trouver tant de points que l'on voudra de la Parabole.

Pour

Pour donc décrire par le point A, de l'Axe donné AB, une Parabole, prenez sur cet Axe AB prolongé les lignes égales AC, AD, plus ou moins grandes, selon que vous voudrez avoir une Parabole plus ou moins ouverte. Prenez sur le même Axe AB, au dessous du sommet A, autant de points differens que vous en voudrez trouver de la Parabole, comme B, par lesquels vous tirerez les lignes indéfinies EBE perpendiculaires à l'axe AB, pour y marquer les points E de la Parabole, en portant les distances DB, depuis le Foyer C, de part & d'autre sur leurs perpendiculaires correspondantes, &c.

Planche 4. 29. Fig.

PROBLEME XXVI.

Décrire une Hyperbole par un point donné entre deux Asymptotes données.

L'*Hyperbole* est la section d'une Cone coupé par un Plan, qui étant prolongé rencontre ce Cone aussi prolongé au dehors de sa pointe: & les *Asymptotes* sont deux lignes droites, comme AB, AC, qui se coupent au point A, appellé *Centre de l'Hyperbole*, lesquelles étant prolongées autant que l'on voudra ne sçauroient jamais couper l'Hyperbole GDG, si loin qu'on la prolonge, quoy qu'elles en approchent toûjours de plus en plus, en étant toûjours éloignées d'une quantité moindre que telle autre quantité que l'on sçauroit imaginer. 30. Fig.

La proprieté de ces Asymptotes est telle, que si l'on tire au dedans de leur angle une ligne droite comme l'on voudra, comme EF, qui coupe les Asymptotes aux deux points E, F, & l'Hyperbole aux deux points D, G, les lignes DE, FG, sont égales entre elles. C'est pourquoy si l'on donne le point D, au dedans des Asymptotes AB, AC, par lequel il faille décrire une Hyperbole, on tirera par ce point donné D, une droite quelconque EF, sur laquelle on portera la longueur de la partie DE, terminée par le point donné D, & l'une des Asymptotes, depuis le point F, de l'autre Asymptote au point G, qui sera de l'Hyperbole, &c.



TABLE

Des Termes expliquez dans l'Introduction aux Mathematiques.

De-

Iso-

Prin-

Q

R

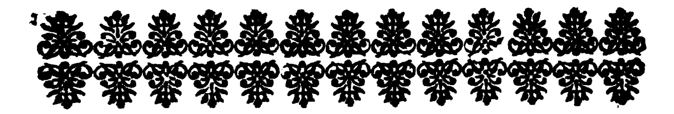
S

Sur-

Fin de la Table.



LES



LES ELEMENS D'EUCLIDE.

Expliquez & démontrez d'une maniere courte & facile, avec l'usage des Propositions.

QUOIQUE nôtre dessein ne soit pas dans ce petit Cours de Mathematique, d'expliquer tous les Livres des Elemens d'Euclide, mais seulement les six premiers, & l'onziéme & le douziéme, qui nous semblent necessaires & suffisans pour l'intelligence de ce que nous avons à dire dans la suite; neanmoins nous voulons suivre Euclide pas à pas, & ne point nous éloigner de son dessein, qui a été de ne rien supposer qui n'eût été enseigné & démontré auparavant, sans changer ses constructions, lorsqu'elles seront générales & faciles, & qu'elles dépendront de quelque Problême qui aura precedé, pour ne pas rendre ce Problême inutile, comme quelques-uns ont fait, ce qui me semble mal à propos, pour le moins lorsqu'en suivant la methode d'Euclide, on a une résolution plus générale. Ainsi quand par exemple Euclide enseigne à construire un Triangle de 22. 1.
trois lignes données, pour au moyen de ce Problême résou- 23. 1.
dre le suivant, qui est de faire à un point donné d'une ligne donnée un angle égal à un angle donné; ce seroit contre son intention, & contre la beauté d'une science methodique, de resoudre ce dernier Problême sans se servir du precedent, parce qu'une autre resolution, telle qu'on la trouve dans quelques Livres, n'est pas si geometrique, ni si générale. Neanmoins pour abreger, nous negligerons à l'imitation du P. Taquet & du P. Dechales, les Propositions qui nous sembleront de petite consequence, & qui ne seront pas necessaires pour la demonstration de celles qui suivront: & nous tâcherons de faire voir l'usage des principales Propositions par des exemples autant familiers qu'il nous sera pos-

sible. Ceux qui en voudront davantage, pourront voir Henrion, qui est le meilleur Commentateur d'Euclide que je connoisse.

LIVRE I.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Euclide traite dans ce premier Livre des Lignes, des Angles, des Triangles, & des autres figures planes rectilignes, & principalement des Parallelogrammes, enseignant la maniere de reduire un Plan rectiligne en un Parallelogramme, pour pouvoir ensuite le reduire en Quarré, comme il enseigne dans le second Livre : & sur la fin il explique & démontre cette celebre Proposition de Pythagore, laquelle porte que le Quarré du plus grand côté d'un triangle rectangle, qu'on appelle communément *Base*, & plus ordinairement *Hypotenuse*, est égal à la somme des quarrez des deux autres côtez, & qui est le fondement de l'Addition geometrique à l'égard des Plans, c'est à dire que par son moyen l'on peut ajoûter ensemble plusieurs Plans, & en trouver un seul qui leur soit égal.

DEFINITIONS.

I.

Le *Point Mathematique* est ce qui n'a aucunes parties, & qui par consequent est indivisible, & ne peut être conçû que par l'entendement.

Cette Definition distingue le Point Mathematique du *Point Physique*, qui peut être apperçû par nos sens, parce qu'il a des parties. Neanmoins dans la pratique on ne laisse pas de le prendre pour le Point Mathematique, lorsqu'on ne le soûdivise point : comme quand on dit qu'une grandeur contient un certain nombre de pieds exactement, on considere le Pied comme un Tout indivisible, & par consequent comme un Point Mathematique : mais si outre les Pieds on dit qu'il y a encore quelques Pouces de plus, & pas davantage, c'est alors le Pouce qui est pris pour un Point Mathematique,

matique, puiſqu'on ne le ſoûdiviſe plus, comme il a été fait du Pied, lequel dans ce cas eſt pris pour un Point Phyſique.

II.

La *Ligne* eſt une étenduë en longueur ſans aucune largeur ni profondeur, laquelle par conſequent ne peut être conçûë que par l'entendement.

On dit ordinairement que la Ligne eſt produite par le mouvement du Point, ce qui fait qu'elle ne peut avoir aucune largeur, ni aucune profondeur, & qu'on la nomme le flux ou écoulement d'un point d'un lieu à un autre: or comme on ne ſçauroit tirer réellement aucune Ligne qui ne ſoit *Phyſique*, c'eſt à dire qui n'ait outre ſa longueur, quelque largeur & quelque profondeur, cela n'empêche pas qu'on ne la prenne pour une *Ligne Mathematique*, quand on n'applique ſon attention qu'à ſa longueur. Comme lors que l'on conſidere la longueur d'un chemin ſans faire reflexion à ſa largeur.

III.

Les deux *Extremitez d'une ligne* ſont des points.

Cela s'entend des lignes qui ont deux extremitez, ſans que de cette definition il s'enſuive que toutes les lignes ayent deux extremitez, étant certain que celles qui renferment un eſpace, telles que ſont la circonference d'un Cercle, d'une Ellipſe, &c. n'ont point d'extremitez.

IV.

La *Ligne droite* eſt celle dont tous les points ſont également placez entre ſes deux extremitez.

D'où il ſuit que la *Ligne courbe* eſt celle dont toutes les parties ne ſont pas poſées également, de ſorte que quelques-unes s'abaiſſent ou s'élevent plus que quelques autres.

V.

La *Superficie* ou *Surface* eſt une étenduë en longueur & en largeur, ſans aucune épaiſſeur ou pro ondeur.

Comme la ligne eſt la premiere eſpece de quantité continuë, n'ayant qu'une dimenſion, ſçavoir une longueur, de même la ſurface eſt une ſeconde eſpece de quantité continuë, puiſqu'elle a deux dimenſions, ſçavoir une longeur & une largeur: & comme la ligne eſt produite par le mouvement du point, auſſi l'on peut dire que la ſurface eſt cauſée par le mouvement de la ligne: & enfin comme la ligne eſt compoſée d'une infinité de points, auſſi la ſurface eſt compoſée d'une infinité de lignes.

VI.

Les *Extremitez d'une surface* quand elle en a, sont des lignes.

C'est une suite de la nature de la surface, qui étant composée d'une infinité de lignes, doit être terminée par des lignes, quand elle a des bornes : tout de même qu'une ligne étant composée d'une infinité de points, doit être bornée par des points quand elle a des limites. Ce qui s'entend comme vous voyez, lorsque l'une & l'autre de ces deux especes de quantité ont des extremitez : car nous avons déja remarqué que le Cercle, l'Ellipse, &c. sont bornez d'une seule ligne qui n'a point d'extremitez, ou pour mieux dire, dont les extremitez sont jointes ensemble ; & nous remarquerons de la même façon qu'une Sphere, qu'un Spheroïde, &c. sont bornez par une seule surface, qui n'a point d'extremitez.

VII.

La *Surface Plane* ou le *Plan*, est une surface, dont toutes les lignes droites sont également posées, de sorte que l'une n'est pas plus élevée ni plus abaissée que l'autre.

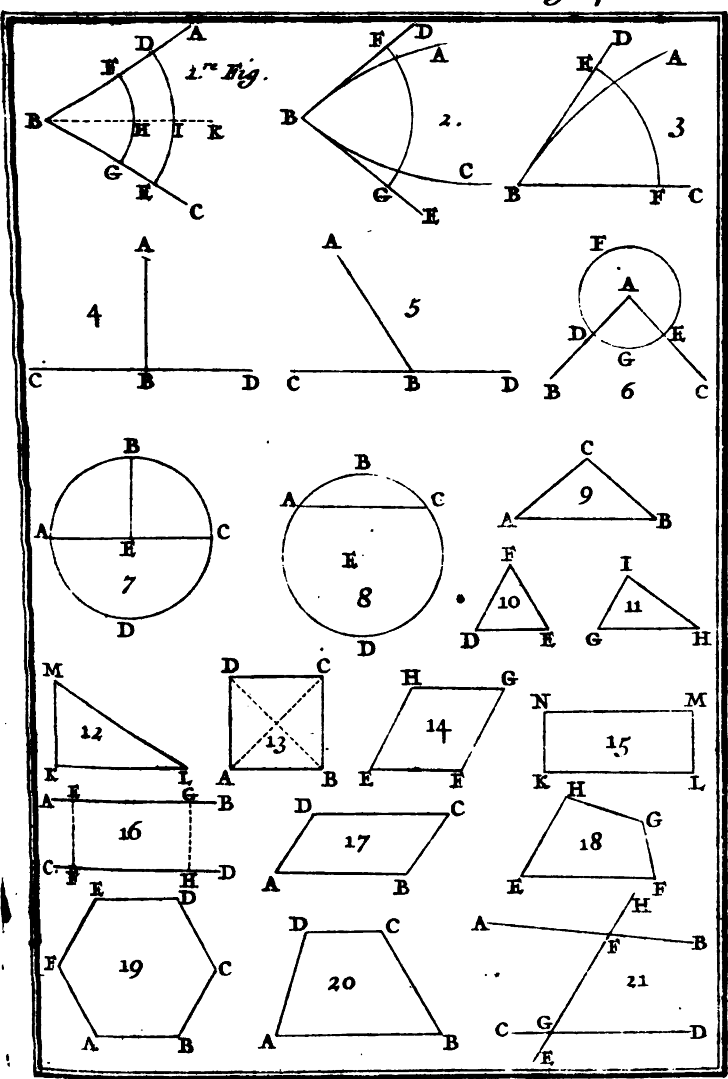
D'où il suit qu'une *superficie courbe* est une surface qui n'a pas toutes ses parties également placées, de sorte que l'une s'abaisse ou s'éleve plus que l'autre. Quand une semblable surface est considerée du côté qu'elle s'enfonce, on l'appelle *surface concave* : & quand on la considere du côté qu'elle s'éleve, on la nomme *surface convexe*. Les Bienheureux voyent la surface convexe du Ciel, & nous la concave.

VIII.

L'*Angle plan* est un espace indefini terminé par deux lignes inclinées l'une à l'autre, lesquelles se rencontrent sur un Plan en un point, où se forme l'Angle : de sorte que les deux lignes qui en ce point forment un Angle, ne font pas une même ligne droite : *comme ABC*.

Planche 1. 1. Fig. Ainsi vous voyez qu'afin que deux lignes fassent un Angle, il faut non seulement qu'elles se rencontrent, mais encore qu'étant prolongées au delà du point de leur rencontre, qu'on appelle *Pointe de l'Angle*, elles se coupent, c'est à dire s'écartent l'une de l'autre.

Vous voyez aussi que la grandeur d'un Angle ne dépend pas de la longueur des lignes qui le forment, mais de leur inclination, car il est évident par la définition, que plus


1.re Fig.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
2.
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

plus ou moins les lignes seront inclinées ; l'angle sera plus grand ou plus petit, lequel a été appellé *Angle Plan*, parce qu'il se décrit sur un Plan. Il y en a de trois especes, que nous allons expliquer. Planche 1. 1. Fig.

IX.

L'*Angle rectiligne* est celui dont les deux lignes sont droites, comme ABC, dont les lignes BA, BC, sont droites, & aussi l'angle BAK, dont les lignes BA, BK, sont droites.

C'est de ce seul Angle dont Euclide parle dans ce Livre, c'est pourquoy quand nous parlerons simplement d'un Angle, cela se doit entendre d'un Angle rectiligne, que l'on peut seulement marquer par une seule lettre, sçavoir par la lettre qui est à sa pointe, lorsqu'en ce point il ne se forme qu'un Angle : mais lorsqu'à un même point il y a plusieurs Angles par plusieurs lignes qui y aboutissent, alors pour faire connoître celuy dont on parle, on se sert de trois lettres, dont celle du milieu represente la pointe de l'Angle. Ainsi parce qu'au point B, il se forme trois angles, si l'on veut representer l'Angle des deux lignes BA, BC, on écrira ainsi ABC : & si l'on veut exprimer l'Angle des deux lignes BA, BK, on écrira de la sorte, ABK : & pareillement pour faire connoître l'Angle des deux lignes BK, BC, on le representera ainsi KBC, ou bien ainsi, CBK. Ainsi des autres.

Nous avons déja dit qu'un Angle est plus grand ou plus petit, selon que l'inclination de ses deux lignes est plus grande, ou plus petite : & nous dirons icy que la mesure d'un Angle rectiligne se determine par un arc de cercle décrit à volonté de sa pointe, & terminé entre les deux lignes de cet Angle. Ainsi on connoîtra que la mesure de l'Angle ABC, est l'arc de cercle DE, ou bien FG, qui ont leurs centres à la pointe B : étant certain que l'arc DE est telle partie de la circonference entiere de son cercle, que l'arc FG est de la sienne, parce que si autour du point fixe B, on fait mouvoir par pensée la ligne BC, pour luy faire faire avec la ligne immobile AB, des angles plus grands ou plus petits, tous les points de la ligne BC se mouvront circulairement & en même temps autour du point B : de sorte que le point E, par exemple, décrira par son mouvement l'arc DE, lequel par consequent sera la mesure de l'Angle ABC : & pareillement le point G, décrira par son mouvement l'arc FG, lequel par consequent doit aussi être la mesure du même Angle ABC. Ainsi des autres.

Il est aisé de conclure de ce que nous venons de dire, que la droite BK divisera l'Angle ABC en deux également, c'est à dire en deux Angles égaux, sçavoir ABK, KBC, lorsque passant par la pointe B, elle divisera la mesure DE de l'Angle

 ABC,

ABC, en deux également au point I, c'est à dire en deux arcs égaux ID, IE, qui sont les mesures des Angles égaux ABK, KBC. Où l'on void que deux Angles, comme ABK, KBC, sont égaux, lorsque leurs mesures ID, IE, qui ont été décrites de leurs pointes avec une même ouverture du compas, sont égales.

4. Fig. Par ce que nous venons de dire, il ne sera pas mal-aisé de juger de la mesure d'un *Angle curviligne*, qui est un Angle plan compris de deux lignes courbes, comme ABC: car il n'y a qu'à rapporter cet Angle curviligne ABC, au rectiligne DBE, dont les lignes droites DB, DE, touchent à la pointe B, les deux courbes AB, AC, dont l'inclination ne sauroit si peu changer que l'ouverture de leurs touchantes BD, BE, ne change en même temps. C'est pourquoi si de la pointe B, l'on décrit à volonté l'arc de Cercle FG, cet arc FG, qui est compris par les deux touchantes BD, BE, étant la mesure de l'Angle rectiligne DBE, sera aussi la mesure du curviligne ABC. (Planche 1.)

5. Fig. C'est de la même façon que l'on déterminera la mesure d'un *Angle Mixte*, qui est compris par une ligne courbe & par une droite, comme ABC: sçavoir en tirant par la pointe B, la droite BD, qui touche la courbe AB en B, & en décrivant à volonté de la même pointe B, une circonference de cercle, dont la partie DE, comprise entre la ligne droite BC, & la touchante BD, sera la mesure de l'Angle Mixte ABC.

Il suit évidemment de ce qui a été dit, que quand deux lignes se touchent, elles ne font aucun angle, parce qu'elles ne sont point inclinées l'une à l'autre. Ainsi on appelle mal à propos *Angle de contingence* cet Angle imaginaire de la touchante d'un cercle & de sa circonference. Voicy ce que nous en avons dit dans les remarques que nous avons faites ailleurs sur l'Euclide du P. Dechales.

Puisque ce qu'on appelle Angle de contingence est moindre que quelque Angle rectiligne que ce soit, il s'ensuit qu'il est égal à 0, c'est à dire que ce n'est rien. Ainsi on void que quand une ligne droite touche la circonference d'un cercle, elle ne fait pas avec elle un Angle. C'est pourquoi les difficultez qui se rencontrent icy, ne viennent que de ce que cet attouchement n'est pas un Angle, & que la définition de l'Angle n'est pas assez claire, parce que l'on n'explique pas bien ce que c'est que l'attouchement de deux quantitez.

Nous dirons donc en général, que l'attouchement de deux quantitez *est la rencontre de ces deux mêmes quantitez, lesquelles étant prolongées ne se coupent pas, c'est à dire, ne sont pas inclinées l'une à l'autre. D'où il suit qu'un Angle est mal defini par l'attouchement de deux lignes, & qu'on doit le définir par la rencontre des deux lignes qui le composent, parce que quand deux quantitez se touchent, elles ne font pas un Angle;* car

car quand ces deux quantitez sont des lignes droites, les parties de l'une conviennent avec les parties de l'autre, lorsqu'elles se touchent : ce qui fait que n'étant pas inclinées l'une à l'autre, elles ne se coupent point, & ne font pas un Angle, quoy qu'elles se rencontrent. Il en est de même d'une ligne droite qui touche une courbe, parce que par cet attouchement elles ne sont pas inclinées l'une à l'autre, & ne font pas un Angle : car bien que la ligne courbe semble s'écarter de la ligne droite par sa courbure, & par consequent s'incliner à la lign. droite, & faire avec elle un Angle, cela ne vient que de la figure de la ligne courbe, qui peut être differente en plusieurs manieres, & faire néanmoins un même Angle avec la ligne droite. D'où il est aisé de conclure qu'une ligne droite qui touche la circonference d'un cercle, ne fait pas avec elle un Angle. Ce qui étant bien conçu, toutes les difficultez qui peuvent arriver sur l'attouchement de ces deux lignes, lequel on a appellé mal à propos Angle, seront levées.

Ce que je viens de dire se concevra encore mieux, si l'on considere que l'Angle de deux lignes, quand elles ne sont pas droites, se doit rapporter à un Angle rectiligne formé par la rencontre de deux lignes droites, qui touchent les deux courbes au point où elles se rencontrent, parce que selon que ces deux lignes s'inclineront plus ou moins l'une à l'autre, les deux touchantes s'inclineront aussi plus ou moins l'une à l'autre, & ainsi feront un Angle plus grand ou plus petit, lequel par consequent doit être la mesure de l'Angle curviligne. D'où il suit que quand ces deux lignes courbes se toucheront, elles ne feront aucun Angle, parce que les deux touchantes conviendront ensemble. C'est pourquoy quand on dit par exemple, que si de quelque point de la circonference d'une Ellipse on tire aux Foyers deux lignes droites, ces deux lignes droites feront avec la circonference de l'Ellipse, deux Angles égaux de part & d'autre, ces deux Angles égaux ne sont pas determinez par la circonference de l'Ellipse, mais par la ligne droite au point où se font les Angles.

X.

Quand une ligne droite tombe sur une autre qu'elle rencontre à angles égaux de part & d'autre, en sorte qu'elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre à l'égard de cette autre ligne; chacun de ces deux angles est appellé *Droit*, & chacune de ces deux lignes est dite *Perpendiculaire* à l'autre. *Ainsi on connoît que la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD, parce qu'elle fait avec cette ligne CD, de côté & d'autre les angles égaux ABC, ABD, lesquels à cause de cela sont appellez Droits.* Planche I. 4. Fig.

Ceux qui n'entendent pas les Mathematiques, appellent ordinairement *ligne à plomb* toute ligne perpendiculaire à une autre, sans prendre garde qu'une *ligne à plomb* est seulement celle qui est

 perpendi-

Planche 1. 4. Fig. perpendiculaire à l'Horizon, comme seroit un filet, qui pendroit librement avec un plomb. C'est pourquoy si la ligne CD étoit *Horizontale*; c'est à dire parallele au Plan de l'Horizon, sa perpendiculaire AB seroit une ligne à plomb: & quand la ligne CD ne sera plus horizontale, c'est à dire quand elle sera penchante & inclinée à l'Horizon, si la ligne AB fait encore avec la même CD, des angles égaux de part & d'autre, elle luy sera toûjours perpendiculaire, mais elle ne sera plus à plomb, & s'éloignera de cette situation autant que la ligne CD s'éloignera de la situation horizontale, de sorte qu'elle sera aussi penchante & inclinée à l'Horizon.

X I.

5. Fig. L'*Angle obtus* est celui qui est plus grand qu'un droit; *comme ABD*.

Il faut ajoûter à cette définition, que la mesure d'un Angle obtus est un arc moindre qu'un demi-cercle, parce qu'Euclide ne considere pas comme Angle l'ouverture de deux lignes, qui se mesure par un arc plus grand qu'un demi-cercle, comme l'on peut voir dans 21. 3. où il fait deux cas. Ainsi l'inclination des deux lignes AB, AC, fait un angle au point A, qui n'est point mesuré par le grand arc DEF, qui surpasse un demi-cercle, mais par le petit DGF, qui est moindre qu'un demi-cercle.

6. Fig.

X I I.

7. Fig. L'*Angle aigu* est celui qui est plus petit qu'un droit; *comme ABC*.

Ces deux Angles sçavoir l'Aigu, & l'Obtus, different du Droit, en ce qu'il n'y a qu'une espece d'Angles droits, n'y pouvant pas y avoir des Angles droits differens, c'est à dire plus grands les uns que les autres: au lieu que parmi les Angles aigus & obtus, il y en peut avoir une infinité de plus grands ou de plus petits, parce que leurs mesures peuvent être des parties de cercle, plus grandes ou plus petites. Il est aisé de voir par la Figure, que quand une ligne droite tombe sur une autre à laquelle elle n'est pas perpendiculaire, que dans ce cas on appelle *Ligne Oblique*, ce qui fait aussi appeller *Angle Oblique* un Angle aigu, ou bien un Angle obtus, c'est à dire un Angle qui n'est pas droit; elle fait d'un côté un Angle aigu, comme ABC, & de l'autre côté un angle obtus, comme ABD.

X I I I.

Le *Terme* est l'extremité de quelque chose.

Il est évident que selon cette définition il y a trois sortes de Termes, sçavoir le *Point*, qui est l'extremité de la Ligne; la Ligne qui est l'extremité de la Surface; & la *Surface* qui borne

borne le Corps, lequel ne peut être l'extremité de quelqu'autre quantité réelle, ou que pour le moins nous connoissions. Planche I.

XIV.

La *Figure* est une quantité connuë de deux ou de trois dimensions, qui est comprise & terminée de tous côtez par un, ou par plusieurs Termes.

Il suit de cette définition, que la Ligne ni l'Angle ne sont pas des Figures, parce que la Ligne, quoi que bornée par deux points, quand elle est droite & finie, n'a qu'une dimension: & que l'Angle, quoique borné par deux lignes, n'est pas terminé par tout, l'espace que ces deux lignes renferment, étant indéfini. Les Figures qui sont bornées par un seul terme sont le Cercle, l'Ellipse, la Sphere, &c. & les Figures qui sont terminées par plusieurs termes, sont le Triangle, le Quarré, la Pyramide, &c. Une superficie plane s'appelle *Figure plane*, ou simplement *Plan*.

XV.

Le *Cercle* est une figure plane terminée par le contour d'une seule ligne, qu'on appelle *Circonference du Cercle*, comme ABCDA, au dedans de laquelle il y a un point, comme E, qu'on nomme *Centre du Cercle*, duquel toutes les lignes droites tirées jusques à la circonference, comme EA, EB, EC, &c. sont égales entre elles. 7. Fig.

Le commun des hommes appelle ordinairement cercle son *contour*, c'est à dire sa circonference, comme quand on dit un cercle de tonneau, en faisant abstraction du Plan imaginaire qui est borné par cette circonference, lequel est proprement ce que les Mathematiciens appellent cercle, qu'ils confondent neanmoins assez souvent avec sa circonference, comme quand on dit qu'il est facile de décrire d'un point donné un cercle, pour dire une circonference de cercle: comme aussi quand on dit que deux cercles ne se peuvent couper qu'en deux points, pour dire que deux circonferences de cercle ne se peuvent pas couper en plus de deux points, comme Euclide démontre dans 10. 3.

Le cercle se peut aussi tres-bien définir une surface plane, qui est produite par le mouvement achevé d'une même ligne droite finie autour d'un point fixe, qui est le centre, auquel l'une des deux extremitez de la ligne droite est comme attachée, l'autre extremité décrivant par son mouvement circulaire la circonference.

On dit communément que le cercle est la plus parfaite de toutes les figures planes, parce qu'elle n'a aucune irregularité,

rité, sa circonference étant par tout également courbe, & que dans un contour égal elle est la plus grande de toutes, c'est à dire qu'elle contient plus par exemple qu'un Quarré qui aura un contour égal.

XVI.

Le *Centre d'un Cercle* est donc un point au dedans de sa circonference, duquel toutes les lignes droites tirées jusqu'à la même circonference sont parfaitement égales : *comme E, les lignes droites EA, EB, EC, &c. étant égales entre elles.*

On peut aussi dire que le centre d'un Cercle est un point au dedans de sa circonference, le plus éloigné de la même circonference, ce qui a fait définir le *Centre d'une figure rectiligne* un point de cette figure, autant éloigné de son contour qu'il est possible. D'où il suit que le *Centre d'un Polygone régulier* est le même que le centre du Cercle circonscrit : & que le *Centre d'une Ellipse* est le point où ses deux Axes, qui en representent la longueur & la largeur, s'entrecoupent.

XVII.

Le *Diametre d'un Cercle* est une ligne droite quelconque tirée par le centre du Cercle, & terminée de part & d'autre à la circonference : *comme AC.*

Il est évident qu'un Cercle a une infinité de Diametres differens, qui sont tous égaux entre eux, & que chacun divise non seulement la circonference, mais encore le Cercle en deux également.

Planche 1. 7. Fig. Il est évident aussi qu'une ligne droite tirée du centre d'un cercle à sa circonference, comme EA, ou EB, ou EC, est est égale à la moitié du Diametre du même cercle, & c'est pour cela qu'on l'appelle *Demi-diametre*, & aussi *Rayon du cercle.* Mais on appelle *Arc de cercle* une partie de sa circonference, moindre ou plus grande que la moitié de la même circonference : comme ABC, ou ADC. 8. Fig.

XVIII.

Le *Demi-Cercle* est une figure plane terminée par le Diametre d'un cercle, & par la moitié de sa circonference : *comme AECBA, ou AECDA.* 7. Fig.

Cette figure a été appellée Demi-cercle, parce qu'elle est égale à la moitié d'un cercle. C'est pourquoy la moitié d'un Demi-cercle est appellé *Quart de cercle*, comme AEBA, ou BECB, qui est terminé par deux Demi-diametres ou Rayons perpendiculaires entre eux, & par la quatriéme partie de la circonfe-

conference du Cercle, laquelle on confond quelquefois avec le quart de cercle, comme quand on dit que la Mesure d'un Angle droit est un quart de cercle, pour signifier que c'est la quatriéme partie de la circonference d'un cercle décrit de sa pointe.

XIX.

La *Portion de Cercle*, qu'on appelle aussi *Segment de cercle*, est la partie d'un cercle terminée par une partie de sa circonference & par une ligne droite : *comme ACBA, ou ADCA.* 8. Fig.

Il est évident que par cette définition d'Euclide, le Demi-cercle est une espece de segment de cercle: Neanmoins on entend ordinairement pour *Segment de cercle* une partie du cercle, plus grande ou plus petite que le Demi-cercle; d'où il suit que la ligne droite qui le borne, doit être moindre que le diametre, & que par consequent elle ne doit pas passer par le centre du cercle, comme AC, qui ne passe pas par le centre E. Je croy qu'Euclide n'a pas voulu donner ainsi cette Définition, parce qu'elle suppose que le Diametre est la plus grande de toutes les lignes droites que l'on peut tirer au dedans de son cercle, ce qui a besoin de démonstration, comme on la trouve dans la *Prop.* 15. 3. dans lequel Euclide repete la Définition du Segment de cercle, parce que c'est dans ce Livre où il en démontre les proprietez, & il semble ne l'avoir icy mise que par occasion. Planche 1. 8. Fig.

XX.

La *Figure rectiligne* est celle qui est terminée par des lignes droites.

D'où il suit qu'une *Figure curviligne* est celle qui est comprise par des lignes courbes: & qu'une *Figure mixte* est celle qui est bornée par des lignes courbes & par des lignes droites. Euclide ne traite icy que des Figures rectilignes, dont il fait plusieurs especes, que nous allons expliquer par ordre.

XXI.

La *Figure de trois côtez*, qu'on appelle aussi *Triangle*, est une Figure terminée par trois lignes droites: *comme ABC.* 9. Fig.

Le Triangle est la premiere & la plus simple des figures rectilignes, & elle n'est ainsi appellée que parce qu'elle a trois angles. Or quand on dit simplement *Triangle* sans specifier, cela s'entend d'un *Triangle rectiligne*, qui est composé de trois lignes droites: un *Triangle curviligne* étant une figure plane bornée par trois lignes courbes. Euclide traite seulement icy du Triangle rectiligne, dont il fait six especes, sçavoir Planche 2. 9. Fig.

trois

Planche 1. 9. Fig. trois à raison des côtez, & trois autres à raison des angles, comme vous allez voir, aprés avoir expliqué les figures plus composées.

XXII.

13. Fig. La *Figure de quatre côtez*, qu'on appelle aussi *Quadrilatere* & *Quadrangle*, est une Figure plane terminée par quatre lignes droites : *comme ABCD.*

Cette Figure a été appellée *Quadrangle*, parce qu'ayant quatre côtez, elle a aussi quatre angles. Euclide en fait aussi plusieurs especes à raison de leurs angles & de leurs côtez, que nous expliquerons aprés les Triangles.

XXIII.

19. Fig. La *Figure de plusieurs côtez*, qu'on appelle aussi *Polygone*, est une Figure plane terminée par plus de quatre lignes droites : *comme ABCDEF.*

Cette Figure a été appellée *Polygone*, parce qu'ayant plusieurs côtez, elle a aussi plusieurs Angles. Quand elle en a cinq, on l'appelle *Pentagone* : quand elle en a six, on l'appelle *Exagone*; quand elle en a sept on la nomme *Eptagone* : quand elle en a huit, on la nomme *Octogone* : quand elle en a neuf, elle est appellée *Enneagone* : mais on l'appelle *Decagone*, quand elle en a dix : *Endecagone*, quand elle en a onze : & *Dodecagone*, quand elle en a douze. Lorsqu'un semblable Polygone a tous les angles & tous les côtez égaux, il s'appelle *Régulier* : & *irrégulier*, quand il n'a pas ces conditions.

XXIV.

10. Fig. Des Figures de trois côtez, celle se nomme *Triangle Equilateral*, qui a les trois côtez égaux, *comme DEF, dont les trois côtez DE, DF, EF, sont égaux.*

Le Triangle Equilateral est la plus simple de toutes les figures rectilignes, & d'une seule espece : & c'est aussi par ce triangle qu'Euclide commence la premiere de ses Propositions, pour pouvoir au moyen de ce premier Problême en résoudre plusieurs autres, quoy qu'il les auroit aussi pû résoudre par le Triangle isoscéle, mais il a voulu se servir d'un Triangle plus simple.

XXV.

9. Fig. Le *Triangle Isoscéle* est celui qui a seulement deux côtez égaux, *comme ABC, dont les deux côtez AB, BC, sont égaux.*

Il est évident que parmi ces especes differentes de Triangles, l'Isoscéle tient le second rang, pour le moins à l'égard des côtez, & qu'il peut être rectangle, oxygone, & amblygone, parce que l'angle C, compris par les deux côtez égaux AC, BC, peut être droit, aigu, & obtus. Il s'ensuit aussi que tout

tout Triangle équilateral est Isoscéle, mais que tout Triangle Isoscéle n'est pas équilateral. Planche 1.

XXVI.

Le *Triangle Scaléne* est celui, dont les trois côtez sont inégaux, *comme GHI, dont les trois côtez GH, GI, HI, sont inégaux.* 11. Fig.

Il est évident qu'un Triangle Scaléne peut être rectangle, parce qu'il peut avoir un angle droit: & aussi amblygone, parce qu'il peut avoir un angle obtus, & encore oxygone, parce que chacun de ces trois angles peut être aigu, tels que sont les trois angles du Triangle precedent GHI.

XXVII.

De plus, des figures de trois côtez, celle se nomme *Triangle rectangle*, qui a un angle droit, *comme MKL, dont l'angle K est droit.* 12. Fig.

Il est évident qu'un Triangle rectangle peut être isoscéle, parce que les deux côtez KL, KM, qui comprennent l'angle droit K, peuvent être égaux: & aussi scaléne, parce que les deux mêmes côtez KL, KM, peuvent être inégaux, tels qu'ils sont effectivement dans cette figure, ce qui rend inégaux les trois côtez, parce que l'Hypotenuse LM est plus grande que chacun des deux autres côtez KL, KM, comme il sera démontré dans la *Prop.* 19. Mais il ne peut pas être équilateral, parce que ses trois angles seroient égaux, par la *Prop.* 5. & que par consequent chacun seroit le tiers de deux angles droits, & consequemment aigu, parce que les trois Angles d'un triangle sont ensemble precisément égaux à deux droits, par la *Prop.* 32.

XXVIII.

Le *Triangle Amblygone* est celuy qui a un angle obtus, *comme ABC, dont l'angle C, est obtus, c'est à dire plus grand qu'un droit.* 9. Fig.

On void icy comme auparavant, qu'un Triangle amblygone ne peut pas être équilateral, mais qu'il peut bien être Isoscéle, & Scaléne. On void aussi qu'il ne peut pas être rectangle, parce que l'un de ses angles est supposé obtus, c'est à dire plus grand qu'un droit, ce qui fait que chacun des deux autres est necessairement aigu.

XXIX.

Le *Triangle Oxygone* est celuy, dont tous les angles sont aigus, *comme DEF, où chacun des trois angles D, E, F, est aigu.* 10. Fig.

On void aisément par ce qui a été dit du triangle rectangle, qu'un Triangle équilateral est necessairement Oxygone, & qu'un

qu'un Triangle Oxygone peut aussi être isocéle & scaléne. Ces deux dernieres especes de triangles, sçavoir les triangles amblygones & oxygones qui ne sont pas rectangles, sont ordinairement appellez *Triangles obliquangles*.

XXX.

13. Fig. Des Figures de quatre côtez, celle se nomme *Quarré*, qui a les quatre angles droits, & les quatre côtez égaux : *comme ABCD*.

Le Quarré est la figure la plus simple & la plus capable de toutes les figures de quatre côtez : & comme elle est unique dans son espece, on s'en sert tres-commodément dans l'*Arpentage*, c'est à dire dans la mesure des superficies, pour exprimer le *contenu*, ou l'*Aire* d'une superficie, c'est à dire ce qu'elle contient, par des mesures quarrées, en disant qu'elle comprend un certain nombre de pieds quarrez, de toises quarrées, &c. La ligne droite tirée de l'un des angles à son opposé, comme AC, ou BD, se nomme *Diagonale*, ou *Diametre du Quarré*, & le point où ces deux Diametres s'entrecoupent en deux également & à angles droits, s'appelle *Centre du Quarré*. On entend pour un *Pied quarré* un Quarré, dont chaque côté est d'un pied de long : & pareillement pour une *Toise quarrée*, un Quarré, dont chaque côté a une toise de longueur.

Planche 1.

XXXI.

15. Fig. Le *Quarré-long*, ou *Barlong*, qu'on appelle aussi simplement *Rectangle*, est une figure de quatre côtez, qui a tous les angles droits, mais qui n'a pas tous les côtez égaux : *comme KLMN*.

Ces deux figures, sçavoir le Quarré, & le Quarré-long sont appellées *Rectangulaires*, parce qu'elles ont tous leurs angles droits, & elles different seulement en ce que le Quarré-long n'a que les deux côtez opposez égaux, sçavoir KL, MN, & aussi KN, LM, au lieu que le Quarré a tous les côtez égaux. Elles sont d'un grand usage dans la vie civile, car nous voyons que dans l'Arpentage on réduit les figures en Quarré, ou en Quarré-long, pour les pouvoir mesurer : dans l'Architecture on fait ordinairement les Chambres, les Cours, les Jardins, & les Allées en Quarré-long ; & dans les autres Arts on donne presque toûjours la figure d'un Quarré-long aux Tables, aux Cabinets, aux Miroirs, &c.

XXXII.

XXXII.

Le *Rhombe* est une figure de quatre côtez égaux, dont les angles sont obliques : *comme EFGH.* 14. Fig.

Cette figure en termes de Blason, est appellée *Losange*, & elle differe du Quarré en ce qu'elle n'est pas rectangulaire, ayant deux angles aigus, sçavoir les deux opposez E, G, & les deux autres opposez F, H, obtus, & qu'elle n'est pas d'une seule espece comme le Quarré, parce que ses angles obliques peuvent varier en une infinité de manieres differentes, c'est à dire qu'ils peuvent être plus grands & plus petits en une infinité de diverses façons. Planche 1.

XXXIII.

Le *Rhomboïde* est une Figure de quatre côtez, dont les deux opposez sont seulement égaux, sans être équilaterale ni rectangulaire : *comme ABCD, dont les deux côtez opposez AB, CD, sont égaux, aussi bien que les deux opposez AD, BC, & dont les angles sont obliques.* 17. Fig.

Il est évident que cette figure a, comme la precedente, deux angles opposez aigus, sçavoir A, C, & les deux autres opposez B, D, obtus, & qu'elle peut aussi varier en une infinité de manieres differentes.

XXXIV.

Toutes les autres figures de quatre côtez, qui ne sont pas de la qualité des quatre precedentes, sont appellées *Trapézes : comme EFGH.* 18. Fig.

Les quatre figures precedentes, sçavoir le Quarré, le Quarré-long, le Rhombe, & le Rhomboïde, qui peuvent passer sous le nom général de *Parallelogrammes*, parceque leurs côtez opposez sont paralleles, comme il sera démontré à la *Prop.* 34. sont appellées ordinairement *Figures régulieres*, & toutes les autres qu'Euclide appelle *Trapézes*, sont nommées *Figures irrégulieres*, dont nous ferons deux especes, appellant *Trapéze* celle qui n'a point de côtez paralleles entre eux, & *Trapézoïde*, celle qui a deux côtez paralleles, comme ABCD, dont les deux côtez AB, CD, sont paralleles. 20. Fig.

XXXV.

Les *Lignes droites paralleles* sont celles qui étant prolongées sur un même Plan autant loin que l'on voudra de part & d'autre, ne se rencontrent jamais : *comme ABCD.* Planche 1. 16. Fig.

Pour rendre cette Définition plus claire, il faut ajoûter que deux lignes droites paralleles entre elles, non seulement

ne

ne se rencontrent pas de quelque part qu'on les prolonge sur un même Plan, mais encore qu'elles sont toûjours également éloignées entre elles : or comme la distance de deux lignes se prend par la ligne la plus courte, qui est la perpendiculaire, il s'ensuit que toutes les perpendiculaires, tirées entre deux paralleles, sont égales.

DEMANDES.

Euclide ne se sert dans ce premier Livre, aussi-bien que dans tous les autres, que de la ligne droite, & de la circulaire, dont la description est si facile qu'il demande qu'on lui accorde que ;

I.

D'un Point donné à un Point donné, on peut tirer une ligne droite.

II.

On peut prolonger aussi loin que l'on voudra une ligne droite donnée & terminée.

III.

On peut décrire un Cercle de quelque centre que ce soit, & de telle grandeur que l'on voudra.

Oronce ajoûte icy deux Demandes, mais comme elles ne conviennent pas à la définition que nous avons donnée de la Demande, qui est le Principe du Problême, comme l'Axiome est le principe du Theorême ; nous les mettrons comme les autres Commentateurs d'Euclide, au nombre des

AXIOMES.

I.

Planche 1. 19. Fig. Les Grandeurs qui sont égales à une même Grandeur, sont égales entre elles : *comme les deux lignes AF, BC, sont égales chacune à la même ligne AB, ces deux lignes AF, BC, seront égales entre elles. D'où il est aisé de conclure que les trois lignes AF, AB, BC, sont aussi égales entre elles.*

Cet Axiome se peut énoncer plus généralement en cette sorte ; les Grandeurs qui sont égales à une même Grandeur, ou bien à des Grandeurs égales, sont égales entre elles.

Clavius

Clavius ajoûte à cet Axiome, ces deux autres ; Une Grandeur qui est plus petite ou plus grande que l'une des deux Grandeurs égales, est aussi plus petite ou plus grande que l'autre : & reciproquement si de deux Grandeurs égales l'une est plus petite ou plus grande qu'une troisiéme Grandeur, l'autre sera aussi plus petite ou plus grande que la même Grandeur.

On peut ajoûter à ces deux Axiomes, les trois suivans, dont Euclide se sert dans plusieurs démonstrations. Une Grandeur est égale à une autre Grandeur ; lorsqu'elle n'est ni plus petite, ni plus grande. Une Quantité est plus grande qu'une autre Quantité, lorsqu'elle ne luy est pas égale, ni plus petite. Une Grandeur est plus petite qu'une autre Grandeur, lorsqu'elle ne luy est pas égale, ni plus grande.

II.

Si à des Grandeurs égales on ajoûte des Grandeurs égales, les Touts seront égaux : *comme si à deux lignes, dont chacune soit par exemple de 5 pieds on ajoûte deux lignes, dont chacune soit de 3 pieds, chacune à chacune, on aura deux lignes égales, dont chacune sera de 8 pieds.*

III.

Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, les Restes seront égaux : *comme si de deux lignes, dont chacune soit par exemple de 8 pieds on ôte deux lignes, dont chacune soit de 3 pieds, chacune de chacune, il restera deux lignes, dont chacune sera de 5 pieds.*

IV.

Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs égales, les Touts seront inégaux : *comme si à une ligne de 3 pieds, & à une ligne de 2 pieds, on ajoûte deux lignes de 4 pieds, chacune à chacune, on aura une ligne de 7 pieds, & une ligne de 6 pieds, lesquelles sont bien inégales.*

A cet Axiome Clavius ajoûte celuy-cy ; Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs inégales, sçavoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite, les Touts seront inégaux : comme si à une ligne de 5 pieds, on ajoûte une ligne de 4 pieds, & à une ligne de 2 pieds, une ligne de 3 pieds ; on aura d'un côté une ligne de 9 pieds, & de l'autre côté une ligne de 5. pieds, lesquelles sont bien inégales.

V.

Si de Grandeurs inégales on retranche des Gran-

deurs égales, les Restes seront inégaux : *comme si d'une ligne de 8 pieds, & d'une ligne de 6. pieds, on retranche deux lignes de 2 pieds, chacune de chacune, il restera une ligne de 6 pieds, & une ligne de 4 pieds, lesquelles sont bien inégales.*

Clavius ajoûte pareillement à cet Axiome, le suivant ; si de Grandeurs inégales, on retranche des Grandeurs inégales, sçavoir la plus petite de la plus grande, & la plus grande de la plus petite, les restes seront inégaux, le premier reste étant plus grand que le second : comme si d'une ligne de 8 pieds on ôte une ligne de 2 pieds, & d'une ligne de 6 pieds une ligne de 4 pieds, on aura d'un côté une ligne de 6 pieds, & de l'autre côté une ligne de 2 pieds, laquelle est bien moindre que la premiere ligne qui reste de 6 pieds.

VI.

Les Grandeurs qui sont doubles, chacune d'une même grandeur, sont égales entre elles.

Parce que les Grandeurs égales peuvent être prises chacune pour une même Grandeur, on peut énoncer cet Axiome plus généralement en cette sorte ; Les Grandeurs qui sont doubles, chacune d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entre elles : & même encore plus généralement, en disant que les Grandeurs qui sont doubles, triples, quadruples, &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entre elles. Reciproquement il est évident que si de deux Grandeurs égales, l'une est double, triple, quadruple, &c. d'une troisiéme Grandeur, l'autre sera pareillement double, triple, ou quadruple de la même Grandeur.

VII.

Les Grandeurs qui sont moitié d'une même Grandeur, sont égales entre elles.

On peut aussi étendre cet Axiome plus généralement, & dire que les Grandeurs qui sont moitié, ou tiers, ou quart, &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entre elles. Et reciproquement les Grandeurs égales sont chacune moitié, ou tiers, ou quart, &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales.

VIII.

Les Grandeurs qui conviennent ensemble, sont égales entre elles.

Le

Le sens de cet Axiome est par exemple que si deux lignes étant posées l'une sur l'autre, se peuvent tellement ajuster, que toutes les parties de l'une conviennent exactement avec les parties de l'autre, sans que l'une surpasse l'autre; ces deux lignes seront parfaitement égales. Il en est de même de deux angles, & de deux superficies, & même de deux solides, lors que l'un étant mis contre l'autre, & le penetre, ils ne se surpassent pas.

I X.

Le Tout est plus grand qu'une de ses parties.

On peut ajoûter à cet Axiome celuy cy, que toutes les parties d'un Tout, prises ensemble, sont égales à ce Tout: c'est à dire que le Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

X.

Tous les Angles droits sont égaux entre eux.

C'est une suite de la définition d'une ligne perpendiculaire à une autre, qui suppose qu'elle fait avec cette autre de part & d'autre des angles égaux; que nous avons appellez Droits. D'où il suit qu'un Angle rectiligne, ou curviligne, ou mixte, doit être appellé Droit, lorsqu'il est égal à un Droit.

X I.

Si une ligne droite coupe deux autres lignes droites, en sorte qu'elle fasse avec elles d'un côté deux angles interieurs moindres ensemble que deux droits; ces deux autres lignes étant prolongées vers le même côté se rencontreront. Planche 1. 21. Fig.

C'est à dire, si les deux lignes droites AB, CD, sont coupées par une troisiéme ligne droite DE, en sorte que les deux angles interieurs qui sont par exemple vers les extremitez B, D, sçavoir BFG, DGF, sont ensemble moindres que deux droits; ces lignes AB, CD, étant prolongées vers les mêmes extremitez B, D, se rencontreront.

Comme ce Theorême n'est pas évident de luy-même, nous ne nous en servirons pas comme d'un principe, mais nous le démontrerons dans la *Prop.* 34. de la même façon que nous avons déja fait dans le P. Dechales, parce que la démonstration me semble fort naturelle. Puisque donc cet Axiome d'Euclide n'a pas lieu icy, nous substituerons à sa place le suivant.

XII.

Toutes les lignes perpendiculaires tirées entre deux paralleles sont égales.

Cet Axiome s'entend icy des lignes droites paralleles, & des lignes droites, qui sont perpendiculaires à l'une de ces deux : car il est évident par la définition des paralleles,
16.Fig. que si les deux lignes droites AB, CD, sont paralleles, & que l'on tire à l'une de ces deux les perpendiculaires EF, GH, & autant d'autres que l'on voudra, toutes ces perpendiculaires seront égales entre elles.

XIII.

Deux lignes droites ne comprennent pas une Figure.

Il est évident que deux lignes droites, quand elles se rencontrent, ne peuvent faire qu'un angle, qui n'est pas une figure. On peut ajoûter que deux lignes droites ne peuvent se rencontrer qu'en un point, ce qui est la principale cause qui les empêche de pouvoir renfermer un espace, & fermer une Figure.

XIV.

Si une Grandeur est double d'une autre, & l'ajoûtée de l'ajoûtée, le Tout sera double du Tout. *Comme si à une ligne de 6 pieds, qui est double d'une ligne de 3 pieds, on ajoûte une ligne de 4 pieds, qui est double d'une ligne de 2 pieds, le Tout 10 pieds sera double du Tout 5. pieds.*

XV.

Si une Grandeur est double d'une autre, & la retranchée de la retranchée, le Reste sera double du Reste : *comme si d'une ligne de 10 pieds, qui est double d'une ligne de 5 pieds, on retranche une ligne de 4 pieds, qui est double d'une ligne de 2 pieds, le Reste 6 pieds sera double du Reste 3 pieds.*

Nous ometons plusieurs autres Axiomes, parce que les precedens suffisent pour les démonstrations que nous avons à faire, dans lesquelles ces Maximes seront citées tout au long. Pour les Propositions & les Livres où elles seront, on les citera par deux Chifres, dont le premier sera celuy de la Proposition, & le second celuy du Livre. Comme pour citer la troisiéme Proposition du Livre second, on écrira ainsi par 3. 2. c'est ainsi que dans toutes les Mathematiques on cite les Propositions & les Livres des Elemens d'Euclide. Lorsque dans un

Livre

Livre de ces Elemens la citation ne se fera que par un Chifre, ce chifre fera connoître le nombre de la Proposition du même Livre.

PROPOSITION I.

PROBLEME I.

Décrire sur une ligne droite donnée & terminée, un Triangle Equilateral.

POur décrire un Triangle Equilateral sur la ligne donnée AB, décrivez de son extremité A, par l'autre extremité B, l'arc de cercle BCD : & pareillement de l'extremité B, par l'autre extremité A, l'arc de cercle ACE, qui coupe icy le precedent BCD, au point C, par lequel vous tirerez aux deux extremitez A, B, les droites AC, BC; & le triangle ABC sera équilateral ; c'est à dire que les trois côtez AB, AC, BC, seront égaux. Planche 2. 22. Fig.

DEMONSTRATION.

La ligne AC est égale à la ligne AB, *par la Définition du Cercle* : & pareillement la ligne BC est égale à la même ligne AB. Donc *par Ax.* 1. les deux lignes AC, BC, & par consequent les trois AC, BC, AB, sont égales entre elles. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert non seulement pour la suivante, mais encore pour les *Prop. IX. X. & XI.* Mais elle a encore plusieurs autres Usages, qui ne sont pas à mépriser: comme par exemple, on s'en sert tres-commodément pour diviser une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra, ce qui se peut faire tres-facilement en cette sorte. 24. Fig.

Pour diviser la ligne donnée AB, par exemple en cinq parties égales, parcourez à volonté sur la ligne indéfinie CD, cinq parties égales, depuis C jusques en D, & sur la ligne finie CD, décrivez le Triangle équilateral CDE. Tirez par les points de division de la base CD, à l'angle C, autant de lignes droites, & vous aurez un instrument propre

Planche 2. 24. Fig. pour diviser en cinq parties égales non seulement la ligne donnée AB, mais encore telle autre ligne que l'on voudra, moindre que la base CD, en cette sorte. Retranchez des deux côtez EC, ED, les deux lignes EF, EG, égales chacune à la ligne donnée AB, & menez la droite FG, qui sera égale à la ligne proposée AB, & se trouvera divisée en cinq parties égales par les lignes tirées de l'angle E, par les divisions de la base CD.

La démonstration de cette pratique dépend du *Liv. 6.* & de la *Prop.* 3. Or quoique l'on ne sçache pas encore le Livre sixiéme, ni la maniere de retrancher une petite ligne d'une plus grande, il suffit de supposer la chose comme démontrée, & de transporter la petite ligne sur la plus grande, car dans la pratique on peut, comme dit Aristote, supposer sans absurdité, que ce qu'on a appris à faire, ou ce que l'on peut apprendre sans peine, soit déja fait.

On peut aussi se servir tres-utilement de cette proposition, pour mesurer sur la terre une ligne horizontale, qui est seulement accessible par l'un de ses bouts, comme nous enseignerons dans la *Geometrie Pratique*.

PROPOSITION II.

PROBLEME II.

Tirer d'un point donné une ligne égale à une ligne donnée.

23. Fig. POur tirer du point donné A, une ligne égale à la ligne donnée BC, joignez la droite AB, & décrivez par *Prop.* 1. sur cette ligne AB, le Triangle équilateral ABD. Décrivez du point B, par le point C, l'arc de cercle ICK, & prolongez le côté BD jusqu'à l'arc de cercle au point E. Décrivez du point D, par le point E, l'arc de cercle GEFH, & prolongez le côté AD jusqu'à l'arc de cercle en F. Je dis que la ligne AF est égale à la donnée BC, & qu'ainsi le Problême est resolu.

DEMONSTRATION.

Si des deux lignes DE, DF, qui sont égales, *par la définition du cercle*, on ôte les deux DA, DB, qui sont aussi égales, *par la construction*, parce qu'elles sont les côtez du triangle équilateral ABD, il restera par

Ax.

Ax. 1. les deux lignes égales AF, BE. Ainsi nous sçavons que la ligne AF est égale à la ligne BE : & comme *par la définition du cercle*, la ligne BC est aussi égale à la même ligne BE ; il s'ensuit *par Ax.* 1. que la ligne AF est égale à la ligne BC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* Planche 2.

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme pour la suivante, & elle sert aussi pour démontrer les *Prop. V. & XX.* & dans plusieurs autres rencontres.

PROPOSITION III.

PROBLEME III.

Deux lignes droites inégales étant données, retrancher de la plus grande, une partie égale à la plus petite.

POur retrancher de la ligne donnée AB, une partie égale à la ligne donnée CD, que je suppose plus petite ; tirez *par Prop.* 2. du point A, la ligne AE égale à CD, & décrivez du même point A, par le point E, l'arc de cercle GFH, qui retranchera de la plus grande ligne donnée AB, la partie AF égale à la plus petite ligne donnée CD. 25. Fig.

DEMONSTRATION.

La ligne AF, est égale à la ligne AE, *par la définition du cercle*, & la ligne CD est égale à la même ligne AE, *par la construction* : c'est pourquoy, *par Ax.* 1. la ligne AF est égale à la ligne CD. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop. XVIII.* & dans plusieurs autres cas, qui ne sont pas assez de consequence pour en parler davantage. Nous dirons seulement qu'elle peut, aussi-bien que la precedente, avoir plusieurs cas, dont nous ne parlerons point, parce que la construction & la démonstration seront toûjours les mêmes.

PROPOSITION IV.

Planche 2.

THEOREME I.

Si deux Triangles ont deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, & l'angle compris de ces deux côtez égal dans chaque Triangle : la base sera égale à la base, les deux autres angles seront égaux aux deux autres angles, semblablement posez, chacun au sien : & tout le Triangle sera égal à tout l'autre Triangle.

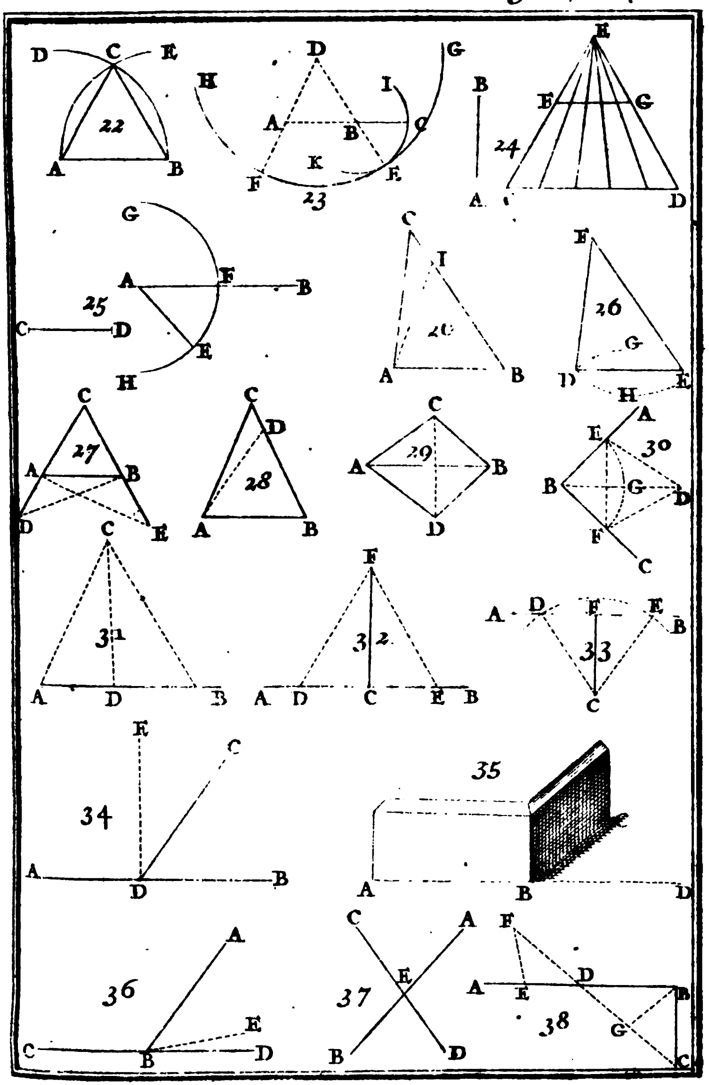
16. Fig. JE dis que si le côté AC du triangle ABC, est égal au côté DF du triangle DEF, le côté BC égal au côté EF, & l'angle compris C, égal à l'angle compris F ; la base AB est égale à la base DE, l'angle A à l'angle D, l'angle B à l'angle E, & tout le triangle ABC à tout le triangle DEF.

DEMONSTRATION.

Appliquez par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, en sorte que le côté AC convienne avec le côté BC, ce qui est possible *par Ax.* 8. parce que ces deux lignes AC, DF, sont supposées égales : auquel cas le côté CB tombera sur le côté FE, parce que l'on suppose que les deux angles C, F, sont égaux ; & le point C tombant sur le point F, il faut *par Ax.* 8. que le point B tombe sur le point E, parce que ces deux lignes BC, EF, sont aussi supposées égales. C'est pourquoy la base AB tombera sur la base DE, parce que si elle tomboit sur DGE, ou sur DHE, deux lignes droites comprendroient une Figure, ce qui est contre l'*Ax.* 12. Ainsi *par Ax.* 8. la base AB sera égale à la base DE, l'angle A à l'angle D, l'angle B à l'angle E, & tout le triangle ABC à tout le triangle DEF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & aussi des *Prop.* VIII. X. XIV. XLVII. & de plusieurs autres Propositions des Livres suivans, & principalement de la *Prop.* 6. *du Livre sixiéme*, laquelle a beaucoup d'affinité avec celle cy. Mais elle sert aussi pour mesurer une ligne accessible sur la terre, que l'on ne peut pas parcourir à cause de


22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38

de quelque empêchement, comme nous ferons voir dans la *Geometrie Pratique*. Planche 2. 26. Fig.

Comme les démonstrations qui se font par la superposition, quoique tres-bonnes, ne plaisent pas également à tout le monde, nous démontrerons autrement les Propositions qui suivront, & aussi le Theorême suivant, que le P. Taquet démontre par la superposition, & que nous démontrerons par le moyen du Theorême precedent, comme vous allez voir.

THEOREME.

Deux Triangles sont égaux, quand ils ont un côté égal, & les deux angles adjacens à ce côté, pareillement égaux, chacun à chacun.

JE dis que si le côté AB du Triangle ABC est égal au côté DE, du triangle DEF, l'angle adjacent A, égal à l'angle adjacent D, & l'autre angle adjacent B, égal à l'autre angle adjacent E; ces deux triangles ABC, DEF, sont égaux.

PREPARATION.

Prenez sur le côté BC, la ligne BI égale au côté EF, sans considerer où le point I tombe, & menez la droite AI.

DEMONSTRATION.

Les Triangles ABI, DEF, ayant les deux côtez AB, BI, égaux aux deux DE, EF, & l'angle compris B égal à l'angle compris E, sont égaux, *par le Theorême precedent*; & l'angle BAI est égal à l'angle EDF: & comme l'on suppose que l'angle BAC est aussi égal à l'angle EDF, il s'ensuit par *Ax* 1. que l'angle BAI est égal à l'angle BAC, & par *Ax.* 8. que la ligne AI tombe sur la ligne AC, & par consequent le point I sur le point C, ce qui fait voir que BC est égale à BI: & parce que EF est aussi égale à BI, *par constr.* il s'ensuit *par Ax.* 1. que les deux côtez BC, EF sont égaux, & *par le Theorême precedent*, que le Triangle ABC est égal au Triangle DEF. *Ce qu'il falloit démontrer.* Voyez la *Prop.* *XXVI.*

PROPOSI-

Planche 2.

PROPOSITION V.

THEOREME II.

Dans un Triangle Isoscéle les angles sur la base sont égaux entre eux : & ses côtez étant prolongez, les angles sont aussi égaux entre eux.

17. Fig. JE dis que si les deux côtez AC, BC, du Triangle ABC, sont égaux entre eux, & qu'on les prolonge au dessous de la base AB ; les angles ABC, CAB, qui sont sur cette base AB, sont égaux entre eux : & que pareillement les angles ABE, BAD, qui sont sous la même base AB, sont égaux entre eux.

PREPARATION.

Prenez sur les côtez égaux AC, BC, prolongez les deux lignes égales AD, BE, d'une grandeur volontaire, & joignez les droites AE, BD.

DEMONSTRATION.

Si aux lignes égales CA, CB, on ajoûte les deux égales AD, BE, on connoîtra *par Ax.* 2. que les deux CD, CE, sont égales, & par *Prop.* 4. que les deux triangles CDB, CEA, sont égaux, parce qu'ils ont l'angle C commun, & les deux côtez CD, CB, égaux aux deux CE, CA. C'est pourquoy la base BD sera égale à la base AE, l'angle D à l'angle E, & l'angle CAE à l'angle CBD, & *par Prop.* 4. les deux triangles ABD, BAE, seront aussi égaux, parce qu'ils ont les deux côtez AD, BD, égaux aux deux côtez BE, AE, & l'angle compris D égal à l'angle compris E. C'est pourquoy les Angles DAB, ABE, seront égaux, *ce qui est l'une des choses qu'il falloit démontrer* : & les angles ABD, BAE, seront aussi égaux, lesquels étant ôtez des deux angles CBD, CAE, qui ont esté démontrez égaux, il restera *par Ax* 3. les deux angles égaux CBA, CAB, *Ce qui restoit à démontrer.*

COROL-

Planche 3.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'un Triangle Equilateral, c'est à dire qui a les trois côtez égaux, est Equiangle, c'est à dire qu'il a les trois angles aussi égaux, parce que comme nous avons déja remarqué ailleurs tout Triangle Equilateral est Isoscéle.

USAGE.

Le Triangle Isoscéle peut servir à la place du Triangle Equilateral, pour diviser une ligne donnée, ou bien un angle donné en deux également, & aussi pour tirer une perpendiculaire à une ligne donnée. C'est sur la proprieté du Triangle Isoscéle, qu'est fondé l'usage du Compas de proportion: & qu'on a supputé cette Table des angles plans, dont nous avons enseigné l'usage pour mesurer un angle sur la terre. Enfin cette Proposition sert pour démontrer les *Prop.* XVIII. XX. XXIV. & plusieurs autres des Livres suivans.

PROPOSITION VI.

THEOREME III.

Si un Triangle a deux angles égaux entre eux, les côtez qui leur sont opposez, sont aussi égaux entre eux.

JE dis que si les deux angles ABC, BAC, du triangle ABC, sont égaux entre eux, les côtez BC, AC, qui les soûtiennent, c'est à dire qui leur sont opposez, sont pareillement égaux entre eux. 28. Fig.

PREPARATION.

Prenez sur le côté BC, la ligne BD, égale à l'autre côté AC, sans considerer où le point D tombe, & joignez la droite AD.

DEMONSTRATION.

Les Triangles ABC, ABD, ayant les deux côtez AB, BD, égaux aux deux AB, AC, & l'angle compris B égal à l'angle compris BAC, sont égaux entre

eux,

Planche 2. 28. Fig.

eux, *par Prop* 4. ce qui rend l'Angle BAD égal à l'angle B: & comme l'on suppose que l'angle BAC est aussi égal à l'angle B, il s'ensuit *par Ax.* 1. que l'angle BAD est égal à l'angle BAC, & que par consequent la ligne AD tombe sur la ligne AC, & le point D sur le point C, & qu'ainsi le côté BC est égal à la ligne BD *par Ax.* 8. & comme le côté AC, est aussi égal à la ligne BD, *par constr.* il est de necessité *par Ax.* 1. que les deux côtez AC, BC soient égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que tout Triangle Equiangle est aussi Equilateral, c'est à dire que tout Triangle qui a les trois angles égaux, a aussi les trois côtez égaux.

USAGE.

On se sert tres-utilement de cette Proposition pour mesurer sur la terre une ligne accessible seulement par l'une de ses extremitez, comme vous verrez dans la *Geometrie Pratique*. On s'en sert aussi pour mesurer la hauteur d'une Tour située sur un Plan horizontal, par le moyen de son ombre, laquelle sera égale à la hauteur de la Tour, lorsque la hauteur du Soleil sera de 45 degrez, ce qu'on pourra aisément connoître par le moyen d'un Quart de cercle, ou de quelque Astrolabe, parce qu'alors on a un triangle rectangle imaginaire, dont l'hypotenuse est le rayon du Soleil qui termine l'ombre, & où chacun des deux angles aigus est de 45 degrez, ce qui rend égaux les deux côtez du triangle, qui sont la Tour & son ombre, &c.

Comme la Prop. VII. *ne sert que de Lemme à la* VIII. *qui se peut démontrer immediatement sans elle, laquelle n'a aucune utilité considerable dans la Geometrie, il semble qu'il l'a faille omettre, pour ne rien faire icy d'inutile.*

PROPO-

PROPOSITION VIII.

Planche 2.

THEOREME V.

Si deux Triangles ont deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, & la base égale à la base; ces deux Triangles seront égaux, & les angles compris par les côtez égaux seront égaux.

JE dis que si le côté AC du Triangle ABC est égal au côté AD du Triangle ABD le côté BC au côté BD, & que la base AB soit commune à ces deux Triangles, ce qui est la même chose que d'avoir des bases égales; les deux Triangles ABC, ABD, sont entierement égaux. 29. Fig.

PREPARATION.

Joignez la droite CD, laquelle tombe icy au dedans des deux Triangles ABC, ABD, car elle peut tomber en dehors, ou bien elle peut convenir avec deux côtez égaux: mais la démonstration de tous ces cas se fera facile à celuy qui aura bien compris la démonstration du cas que nous proposons dans cette figure.

DEMONSTRATION.

Puisque les deux côtez AC, AD, sont égaux, aussi-bien que les deux BC, BD, *par supp.* l'angle ACD sera égal à l'angle ADC, & l'angle BCD égal à l'angle BDC, *par Prop.* 5. & *par Ax* 2. tout l'angle ACB sera égal à tout l'angle ADB. C'est pourquoy *par Prop* 4. les deux triangles ABC, ABD, seront entierement égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & aussi pour faire à un point donné d'une ligne donnée un angle égal à un angle donné, comme il sera enseigné dans la *Prop.* XXIII. Elle sert principalement à la *Prop.* 5. *du Liv.* 6. avec laquelle elle a beaucoup d'affinité.

PROPO-

Planche. 2.

PROPOSITION IX.

PROBLEME IV.

Diviser un angle donné en deux également.

30. Fig. POur diviser en deux également, c'est à dire en deux angles égaux, l'angle ABC, décrivez à volonté de sa pointe B, l'arc de cercle EGF, & joignez la droite EF, sur laquelle vous ferez par *Prop.* 1. le Triangle équilateral DEF, pour avoir le point D, par lequel & par la pointe B, de l'angle donné ABC, vous tirerez la droite BD, qui divisera en deux également l'angle proposé ABC, c'est à dire que l'angle ABD sera égal à l'angle DBC.

DEMONSTRATION.

Le côté BE du triangle BDE est égal au côté BF du triangle BDF, *par la définition du cercle*, & le côté DE est égal au côté DE, parce qu'ils sont les côtez d'un triangle équilateral, & de plus le côté BD est commun à ces deux triangles. Donc *par Prop.* 8. ces deux triangles BED, BFD, sont égaux entre eux, & l'angle DBE est égal à l'angle DBF. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* Voyez la *Prop.* 20. 3.

USAGE.

Vous avez vû dans nos Pratiques de Geometrie l'usage de ce Problême, pour diviser la circonference d'un Demi-cercle de 15 en 15 degrez, c'est à dire en 12 parties égales, & par consequent la circonference du cercle entier en vingt-quatre parties égales, car c'est la même chose de diviser un arc que de diviser un angle, étant certain que l'arc EF, qui mesure l'angle ABC, est aussi divisé en deux également au point G, par la ligne BD. C'est aussi par le moyen de ce Problême qu'on peut diviser la circonference d'un cercle en 32 parties égales, pour les 32 Vents que l'on represente ordinairement dans la Boussole. Ce Problême est aussi tres-utile dans la Gnomonique, lors qu'outre les lignes horaires, on veut tracer dans un Cadran les lignes des demies heures & des quarts d'heures.

Prob. 7. *Introd.*

SCOLIE.

Euclide nous enseigne la division d'un angle en deux seulement, car pour la division de l'angle en trois, ou en quelqu'autre nombre impair, est geometriquement impossible, en ne se servant que du Cercle & de la Ligne droite, comme fait Euclide. Nous repeterons encore icy ce que nous avons dit là-dessus, dans nos remarques sur l'Euclide du P. Dechales. Planche 2. 30. Fig.

Par ce mot Geometriquement, *on doit icy entendre par le Cercle & par la Ligne droite, la Geometrie d'Euclide ne s'étendant pas plus loin. Mais par la Geometrie de Monsieur Descartes, on connoît que la solution d'un Problême est Geometrique, lorsqu'il est resolu par la voye la plus simple & la plus naturelle, bien qu'outre la* Ligne circulaire, *c'est à dire la circonference d'un cercle, on soit obligé de se servir de quelqu'autre ligne courbe, comme par exemple de quelqu'une des Sections Coniques, pour les Problêmes solides, parce qu'un Problême solide ne peut pas de sa nature se resoudre par une voye plus simple. Ainsi ceux qui cherchent à diviser un angle par exemple en trois parties égales, en n'employant que le Cercle & que la Ligne droite, montrent qu'ils n'entendent pas bien la Geometrie, ce Problême étant solide de sa nature.*

PROPOSITION X.

PROBLEME V.

Diviser une ligne donnée en deux egalement.

POur diviser la ligne donnée AB, en deux parties égales, décrivez sur cette ligne AB, le triangle équilateral ABC, *par Prop.* 1. & *par Prop.* 9. divisez l'angle C en deux également par la droite CD, qui divisera aussi en deux également au point D, la ligne proposée AB: de sorte que les deux parties AD, BD, seront égales entre elles. 31. Fig.

DEMONSTRATION.

Le côté AC du triangle ADC, est égal au côté BC du triangle CDB, parce qu'ils sont les côtez d'un triangle équilateral: le côté CD est commun à ces deux mêmes triangles, & l'angle compris ACD est égal à l'angle compris BCD, par *construct.* Donc *par Prop.* 4. les

Planche 2. les deux triangles ADC, BDC, sont égaux entre eux, & la base AD est égale à la base BD. Ainsi la ligne AB est divisée en deux également au point D. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

On se sert tres-utilement de ce Problême, pour tirer par un point donné hors d'une ligne donnée sur la terre, ou sur le papier, une perpendiculaire, comme vous avez vû sur la terre dans les Pratiques de Geometrie & comme vous verrez sur le papier dans la *Prop.* 12. Euclide s'en sert aussi dans la preparation qu'il fait pour la démonstration de la *Prop.* 16. & l'on s'en sert dans plusieurs autres operations qui regardent les Arts.

PROPOSITION XI.

PROBLEME. VI.

D'un point donné dans une ligne droite donnée, élever une ligne perpendiculaire à cette ligne droite.

32. Fig. POur tirer par le point C, donné sur la ligne donnée AB, une perpendiculaire, prenez à volonté sur cette ligne AB, les deux lignes égales CD, CE, & *par Prop.* 1. décrivez sur la ligne DE, le triangle équilateral DEF, pour avoir le point F, par lequel & par le point donné C, vous tirerez la droite CF, qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB, de sorte que les deux angles DCF, ECF, seront égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

Les trois côtez du Triangle FCD, sont égaux aux trois côtez du triangle FCE, le côté CE étant égal au côté CD, *par constr.* le côté EF au côté DF, parce qu'ils sont les côtez d'un triangle équilateral, & le côté CF étant commun. Donc *par Prop.* 8. ces deux triangles FCD, FCE sont égaux entre eux, & l'angle DCF est égal à l'angle ECF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USA-

USAGE.

Planche 2. 32. Fig.

L'usage de la ligne perpendiculaire est si frequent dans les Mathematiques & dans les Arts, qu'il faut n'avoir jamais rien vû pour l'ignorer. On a besoin dans la *Prop.* 46. de tirer deux lignes perpendiculaires, pour tracer un Quarré. Il est difficile dans la moindre pratique de Geometrie, de se passer de tirer quelque ligne perpendiculaire. Il arrive la même chose dans la Fortification, & encore mieux dans la Perspective, où l'on se sert continuellement de lignes perpendiculaires. Dans la Gnomonique on commence toûjours à tirer deux lignes perpendiculaires, quand on veut tracer un Cadran sur un Plan par les regles de la Geometrie. Enfin les Tailleurs de pierre, les Menuisiers, & plusieurs autres Artisans, ont presque toûjours leur Equierre en main, pour mettre leurs Ouvrages à l'angle droit, ce qu'ils appellent le *Trait quarré*.

PROPOSITION XII.

PROBLEME VII.

D'un point donné hors d'une ligne droite donnée, tirer à cette ligne droite une perpendiculaire.

POur tirer du point donné C, une ligne perpendiculaire à la ligne donnée AB, décrivez à volonté de ce point C, l'arc de cercle DE, qui coupe la ligne donnée AB en deux points, comme D, E: & ayant divisé, *par Prop.* 10. la ligne DE, en deux également au point F, menez de ce point F au point donné C, la droite CF, qui sera la perpendiculaire qu'on cherche, de sorte que les deux angles CFD, CFE, seront égaux entre eux, & par consequent droits. 33. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les droites CD, CE, on connoîtra *par Prop.* 8. que les deux triangles FCD, FCE, sont égaux entre eux, parce que les trois côtez de l'un sont égaux aux trois côtez de l'autre: car le côté CF leur est commun, le côté DF est égal au côté EF, *par constr.* & le côté CD est égal au côté CE, *par la définition du cercle.* D'où

Planche 2. 33. Fig. il suit que l'angle CFD, est égal à l'angle CFE. *Ce qu'il faloit faire & démontrer.*

Usage.

On se sert de ce Problême dans plusieurs rencontres, mais principalement dans l'Arpentage, où pour connoître l'aire d'un triangle sur la terre, on a besoin de tirer de l'un de ses angles une perpendiculaire à son côté opposé, pour en mesurer la longueur, & la multiplier ensuite par la moitié du côté sur lequel elle tombe, comme nous ferons voir plus particuliérement dans la *Geometrie Pratique*.

PROPOSITION XIII.

Theoreme VI.

Quand une ligne droite tombe sur une autre ligne droite; ou elle fait deux angles droits, ou bien deux angles, lesquels pris ensemble sont égaux à deux droits.

34. Fig. Je dis que la ligne CD, qui coupe la ligne AB au point D, fait avec la même ligne AB, à ce point D, les deux angles ADC, BDC qui sont ou droits, ou égaux ensemble à deux droits.

Demonstration.

Il est évident *par la Définition de la ligne perpendiculaire*, que si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB, les deux angles ADC, BDC sont droits : mais si elle n'est pas perpendiculaire à la ligne AB, tirez *par Prop.* 11. du point D, la ligne DE perpendiculaire à la ligne AB, pour avoir les deux Angles droits ADE, BDE, ausquels les deux angles ADC, BDC, sont égaux, puisqu'ils conviennent avec eux. D'où il suit que ces deux angles ADC, BDC, sont ensemble égaux à deux droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que si l'un des deux angles que fait une ligne avec une autre, est aigu, comme BDC, l'autre ADC est necessairement obtus : & que si l'un de ces deux est droit, l'autre est aussi droit : & enfin que si l'un

l'un est connu, l'autre sera aussi connu, en ôtant le connu de deux droits, c'est à dire de 180 degrez, parce qu'un angle droit est de 90 degrez, comme étant mesuré par la quatriéme partie de la circonference d'un cercle, laquelle comme nous avons dit ailleurs, est de 360 degrez. Planche 2. 34. Fig.

COROLLAIRE 2.

Il s'ensuit aussi que si deux lignes droites s'entrecoupent, elles font quatre angles, lesquels pris ensemble valent quatre droits, parce que deux angles d'un côté font deux droits, comme il vient d'être démontré, & que pareillement les deux autres angles de l'autre côté font aussi deux droits: outre que tous ces quatre angles sont mesurez ensemble par la circonference entiere d'un cercle, qui mesure quatre droits. D'où il est aisé de conclure, que tous les angles qui se peuvent former sur un Plan par plusieurs lignes qui aboutissent à un même point, font ensemble aussi quatre droits.

USAGE.

Cette Proposition sert non-seulement pour la suivante, & pour plusieurs autres, mais on s'en sert aussi tres-utilement pour mesurer sur la terre un angle, dans lequel on ne peut pas entrer: comme seroit l'angle ABC de deux murailles, car si l'on prolonge avec un cordeau, ou autrement, l'une des deux lignes AB, BC, comme AB, vers D, & que l'on mesure l'angle CBD, comme il a été enseigné ailleurs, cet angle CBD étant ôté de 180 degrez, le reste donnera la quantité de l'angle ABC, qu'on cherche; comme si l'angle CBD a été trouvé de 50 degrez, en ôtant 50 de 180, il restera 130 degrez pour l'angle proposé ABC. 35. Fig. Probl. 8. Introd.

PROPOSITION XIV.

THEOREME VII.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, qui fassent avec elle de part & d'autre deux angles égaux ensemble à deux droits; ces deux lignes étant continuées ne feront qu'une même ligne droite.

JE dis que si les deux lignes BC, BD, se rencontrent au point B de la ligne AB, en sorte qu'elles fassent avec cette ligne AB, les deux 36. Fig.

 angles

angles ABC, ABD, égaux ensemble à deux droits; ces deux lignes BC, BD, se rencontrent au point B directement, c'est à dire qu'elles font ensemble une ligne droite.

Planche 2. Fig. 36.

PREPARATION.

Prolongez l'une des deux lignes BC, BD, comme par exemple BC vers E, en sorte que CBE soit une ligne droite, sans considerer où tombe la ligne BE.

DEMONSTRATION.

Puisque l'on suppose que CBE est une ligne droite les deux angles ABC, ABE, sont ensemble égaux à deux droits, *par Prop.* 13. & parce que les deux angles ABC, ABD, sont supposez ensemble aussi égaux à deux droits, il s'ensuit par *Ax.* 1. que les deux angles ABC, ABE, sont ensemble égaux aux deux ABC, ABD, pris ensemble, & ôtant l'angle commun ABC, on aura *par Ax.* 3. l'angle ABE égal à l'angle ABD, ce qui fait connoître *par Ax.* 8. que la ligne BE tombe sur la ligne BD, & qu'ainsi les deux lignes BC, BD, sont posées directement. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si d'un même point d'une ligne droite, on luy tire de part & d'autre deux lignes perpendiculaires, ces deux perpendiculaires feront une ligne droite.

USAGE.

Cette Proposition est la converse de la precedente & peut être utile dans la pratique, pour connoître si trois points que l'on void sur la terre, comme B, C, D sont en ligne droite, lorsqu'on ne peut pas aller aux deux extrêmes C, D, pour en juger à la vûë, mais seulement au moyen B : car alors il n'y a qu'à choisir à la vûë un point commode sur la terre, comme A, & mesurer avec un Graphometre, ou autrement, la quantité des angles visuels ABC, ABD,

pour

pour les ajoûter ensemble, & si leur somme est precisément de 180 degrez, on concluera que les trois points proposez C, B, D, sont en ligne droite, autrement ils seront dans la circonference d'un cercle, dont le centre sera vers A, lorsque cette somme sera moindre que 180 degrez, & tout au contraire, quand elle sera plus grande. Planche 2. 36. Fig.

PROPOSITION XV.

THEOREME VIII.

Si deux lignes droites s'entrecoupent, les Angles opposez au sommet seront égaux entre eux.

Lorsque deux lignes droites s'entrecoupent, comme AB, CD, qui se coupent au point E les deux angles opposez qu'elles font à ce point E, comme AEC, BED, sont appellez *Angles opposez au sommet*, qui sont toûjours égaux, comme nous allons démontrer. 73. Fig.

DEMONSTRATION.

Les deux angles AEC, AED, sont *par Ax.* 1. ensemble égaux aux deux angles AED, BED, pris ensemble, parce que chaque somme vaut deux droits, *par Prop.* 13. c'est pourquoy en ôtant l'angle commun AED, il restera *par Ax.* 3. l'angle AEC, égal à l'angle BED. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On démontrera de la même façon, que les deux autres angles opposez au sommet AED, BEC, sont aussi égaux entre eux. Mais la converse de cette Proposition est aussi veritable, sçavoir que si au même point E de la ligne droite AB, concourent deux autres lignes droites EC, ED, qui fassent avec elle les deux angles opposez au sommet AEC, BED, égaux entre eux, ces deux lignes EC: ED, seront en ligne droite; parce que si à chacun de ces deux angles égaux AEC, BED, on ajoûte l'angle commun AED, on connoîtra *par Ax.* 1. que les deux AEC, AED, sont ensemble égaux aux deux AED, BED, pris ensemble: & parce que ces deux Angles AED, BED, sont ensemble deux droits, *par Prop.* 13. il s'ensuit que les deux AEC, BED, sont aussi ensemble égaux à deux droits, & que *par Prop.* 14. les deux lignes EC, ED, sont en ligne droite.

USAGE.

Planche 3. 37. Fig. Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & elle sert aussi pour mesurer une ligne accessible sur la terre, que l'on ne peut pas parcourir à cause de quelque empêchement, comme nous enseignerons dans la *Geometrie Pratique*. Elle sert encore pour tirer d'un point donné hors d'une ligne donnée sur la terre, une perpendiculaire, comme vous allez voir.

38. Fig. Pour tirer par le point donné C, une ligne perpendiculaire à la ligne donnée AB, tirez par ce point C, au point D, pris à discretion sur la ligne AB, la ligne CD, & sur la même ligne AB, la partie DE égale à la moitié CG ou DG, de la ligne CD. Continuez cette ligne CD en F, en sorte que la ligne EF soit égale à la ligne DE, & faites la ligne DB, égale à la ligne DF, pour avoir le point donné B, par lequel & par le point donné C, vous tirerez la ligne CB, qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB; comme l'on connoîtra en tirant la droite BG, qui sera égale aux deux GC, GD, à cause des deux angles égaux & opposez au sommet EDF, BDG, ce qui rend égaux les deux triangles EFD, DGB, &c.

Planche 3. 30. Fig. On se sert aussi tres utilement de cette Proposition, pour mesurer un angle inaccessible sur la terre, comme ABC, en cette sorte. Plantez deux piquets sur la terre en quelques lieux commodes, comme aux points D, E, en sorte que les trois points D, B, C, aussi bien que les trois A, B, E, soient en ligne droite, & mesurez avec un Graphometre, ou autrement, les deux angles D, E, & ôtez leur somme de 180 degrez, pour avoir au reste le troisiéme Angle DBE, ou son égal & opposé au sommet ABC, lequel par consequent sera connu.

PROPOSITION XVI.

THEOREME IX.

L'un des trois côtez d'un triangle étant prolongé, l'angle exterieur est plus grand qu'aucun des deux interieurs opposez.

JE dis que si l'on prolonge par exemple le côté AB, du triangle ABC, vers D, l'angle exterieur CBD est plus grand qu'aucun des deux interieurs opposez BAC, ACB.

Fig. 5.

PRE-

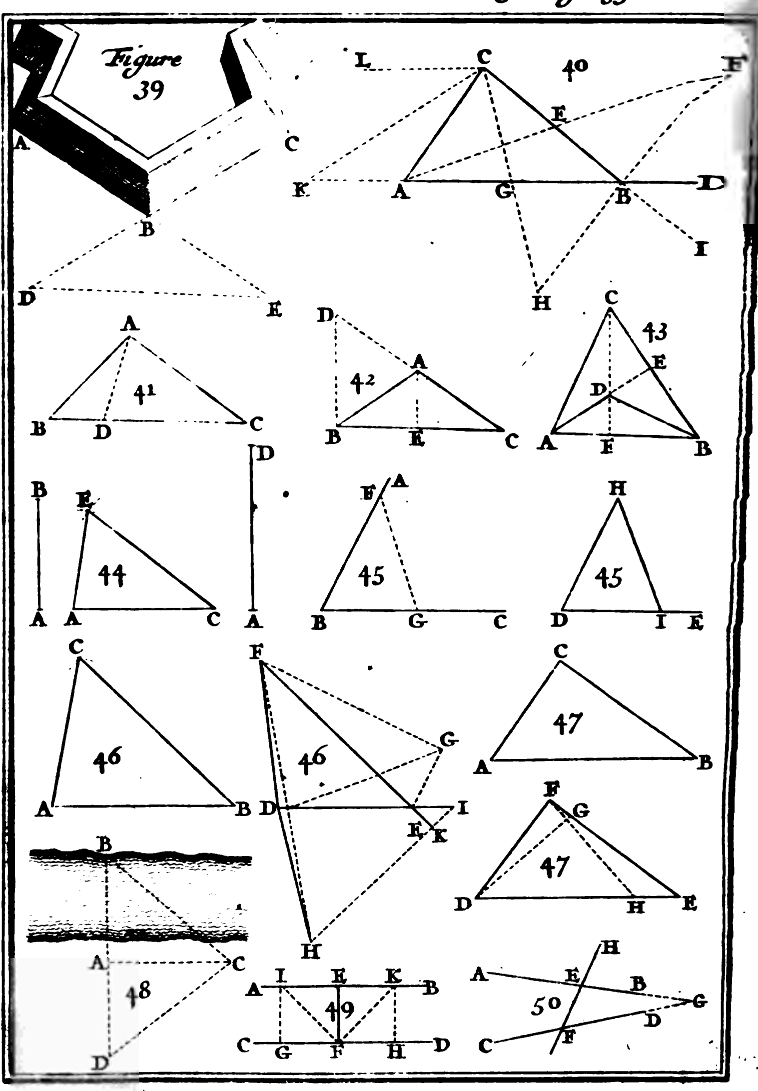

Figure 39
A
B
C
D
E
40
L
C
F
E
K
A
G
B
D
I
H
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

Planche 3. 40. Fig.

PREPARATION.

Ayant divisé le côté CD en deux également au point E, *par Prop.* 10. menez la droite AE, & la prolongez en F, en sorte que EF soit égale à AE, pour joindre la droite BF. Pareillement ayant divisé le côté AB, en deux également au point G, menez la droite CG, & la prolongez en H, en sorte que GH soit égale à CG, pour joindre la droite BH. Enfin prolongez le côté BC vers L.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez AE, CE, du triangle ACE, sont égaux aux deux côtez EF, EB, du triangle EFB, *par constr.* & l'angle compris AEC égal à l'angle compris BEF, *par Prop.* 15. ces deux triangles ACE, EFB, seront égaux, *par Prop.* 4. & l'angle ACE sera égal à l'angle EBF, & par consequent moindre que l'angle CBD. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

Pareillement parce que les deux côtez, AG, CG, du triangle ACG sont égaux aux deux côtez BG, GH, du triangle BGH, *par constr.* & l'angle compris AGC, égal à l'angle compris BGH, *par Prop.* 15. ces deux triangles BGH, ACG, seront égaux *par Prop.* 4. & l'angle CAG sera égal à l'angle GBA & par consequent moindre que l'angle GBI: & parce que l'angle GBI est égal à l'angle CBD, *par Prop.* 15. il s'ensuit que l'angle CAG est aussi plus petit que l'angle CBD. *Ce qui restoit à démontrer.*

SCOLIE.

On pourroit démontrer plus briévement cette Proposition & la suivante, en les considerant comme des Corollaires de la *Prop.* 32. laquelle se peut démontrer indépendamment de celles-cy, comme fait le Pere Taquet.

Il est évident que lorsque l'Angle interieur BCA, sera plus grand, auquel cas le point A sera plus éloigné du point B, cet angle interieur plus grand comme BCK, sera toûjours plus petit que l'exterieur CBD, & que l'excés ne sera pas si grand, de sorte qu'il diminuera continuellement, c'est à dire que l'angle interieur approchera toûjours de plus en plus d'être égal à l'exterieur, à mesure que le point A s'éloignera davantage du point B, jusqu'à ce qu'enfin ce point A étant

 infini-

Planche 3. 40. Fig. infiniment éloigné du point B auquel cas la ligne CA sera parallele à la ligne AB, comme CL, l'angle BCL sera égal à l'exterieur CBD. D'où il suit évidemment que lorsque les deux lignes AB, CL, seront paralleles entre elles, les deux angles BCL, CBD, qu'Euclide appelle *Angles alternes* seront égaux, & reciproquement que lorsque ces deux angles alternes BCL, CBD, seront égaux, les deux lignes AB, CL, seront paralleles.

USAGE.

Planche 2. 32. Fig. Cette Proposition sert non seulement pour démontrer la suivante, & plusieurs autres, mais encore pour démontrer que d'un même point donné on ne peut tirer qu'une ligne perpendiculaire à une ligne droite donnée : parce que si du point F, on pouvoit tirer par exemple les deux lignes FC, FE perpendiculaires à la ligne AB, l'angle exterieur FEB, qui dans ce cas est droit, seroit égal *par Ax.* 10. à l'angle interieur opposé C, qui est aussi droit, & neanmoins il a été démontré plus grand.

On démontre aussi par le moyen de cette Proposition que d'un même point on ne peut pas tirer plus de deux lignes égales sur une ligne donnée, parce que si du point F, on pouvoit tirer par exemple, les trois lignes égales FD, FC, FE, chacun des deux angles FDC, FCE, seroit égal à l'angle FEC *par Prop* 5. c'est pourquoy l'angle FCE, qui est exterieur à l'égard du triangle FCD, seroit égal à l'angle interieur opposé FDC, & neanmoins il a été démontré plus grand. D'où il suit qu'une ligne droite & une circonference de cercle ne se peuvent couper qu'en deux points.

PROPOSITION XVII.

THEOREME X.

Dans un triangle deux angles quelconques pris ensemble sont moindres que deux droits.

Planche 3. JE dis que les deux angles par exemple ABC, BAC, du triangle ABC, sont ensemble moindres que deux droits.

DEMONSTRATION.

Car si l'on prolonge le côté AB, vers D, on connoîtra *par Prop.* 16. que l'angle exterieur CBD est plus grand que l'interieur opposé BAC : c'est

c'eſt pourquoy ſi à chacun de ces deux angles inégaux CBD, BAC, on ajoûte l'angle ABC, on aura les deux angles BAC, ABC, moindres enſemble que les deux ABC, CBD, pris enſemble, c'eſt à dire *par Prop.* 15. moindres que deux droits. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 3. 40. Fig.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition que ſi dans un triangle l'un des trois angles eſt droit, ou bien obtus, chacun des deux autres ſera neceſſairement aigu : & que dans un triangle iſoſcéle, chacun des deux angles égaux, eſt auſſi aigu.

USAGE.

Cette Propoſition commence à convaincre l'eſprit de la verité de l'*Ax.* 11. d'Euclide dont neanmoins nous donnerons la démonſtration, lorſque nous aurons démontré la *Prop.* 34.

Elle ſert auſſi pour démontrer que d'un même point on ne peut pas tirer deux lignes perpendiculaires à une même ligne, parce que ſi cela étoit poſſible, on auroit un triangle, où deux angles ſeroient enſemble égaux à deux droits, puiſque chacun ſeroit droit, contre ce qui vient d'être démontré.

Elle ſert encore pour démontrer que ſi un triangle a un angle obtus, la perpendiculaire tirée de l'un des deux angles aigus ſur ſon côté oppoſé, tombera au dehors du triangle vers l'angle obtus, parce qu'autrement on auroit un triangle, où deux angles pris enſemble ſeroient plus grands que deux droits, car l'un ſeroit droit, & l'autre obtus : contre ce qui a été démontré.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XI.

Dans quelque triangle que ce ſoit, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle.

JE dis que ſi le côté BC du triangle ABC eſt par exemple plus grand que le côté AC, l'angle BAC, qui regarde le plus grand côté BC, eſt plus grand que l'angle B, qui eſt oppoſé au plus petit AC. 41. Fig.

PRE-

Planche 3. 41. Fig.

PREPARATION.

Retranchez du plus grand côté BC, la partie CD égale au plus petit AC, & joignez la droite AD, qui sera necessairement au dedans du triangle ABC.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez CA, CD, du triangle ADC, sont égaux, *par constr.* les deux angles DAC, ADC, seront aussi égaux, *par Prop.* 5. & parce que *par Prop.* 16. l'angle exterieur ADC, est plus grand que l'interieur opposé B, l'angle DAC, & à plus forte raison tout l'angle BAC, sera plus grand que le même angle B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que dans un triangle scaléne, tous les angles sont inégaux. C'est aussi une suite de la *Prop.* 6. parce que s'il y avoit deux angles égaux, il y auroit aussi deux côtez égaux, & ainsi le triangle ne seroit pas scaléne.

USAGE.

Cette Proposition sert non seulement pour la démonstration de la suivante, qui est son inverse, mais encore elle est tres-utile dans la Trigonométrie, pour pouvoir discerner le plus grand de deux angles d'un triangle sans le connoître, ce qui se pourra faire, si l'on connoît la grandeur, ou seulement la raison des côtez opposez, étant certain que le plus grand de ces deux angles sera celuy qui sera soûtenu par un plus grand côté.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XII.

Dans tout Triangle le plus grand côté est celuy qui est opposé au plus grand angle.

41. Fig.

JE dis que si l'angle BAC du triangle ABC, est plus grand que l'angle B, le côté BC opposé au plus grand angle BAC, est plus grand que le côté AC opposé au plus petit angle B.

De-

Planche 3. 41. Fig.

DEMONSTRATION.

Il est déja évident que le côté BC ne peut pas être égal au côté AC, parce que *par Prop.* 5 l'angle B seroit égal à l'angle BAC, que l'on suppose plus grand. Il est aussi évident que le côté BC ne peut pas être plus petit que le côté AC, parce que *par Prop.* 18. l'angle B seroit plus grand que l'angle BAC, lequel tout au contraire est supposé plus grand. Puisque donc le côté BC ne peut pas être égal ni plus petit que le côté AC, il doit *par Ax.* 1. être plus grand que le côté AC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que d'un triangle rectangle, le plus grand des trois côtez est l'hypotenuse, parce que le plus grand des trois angles est l'angle droit : & que dans un triangle amblygone, le plus grand de tous les côtez est celuy qui est opposé à l'angle obtus, parce que cet angle obtus est aussi le plus grand des trois angles.

USAGE.

Cette Proposition sert de Lemme à la suivante, & elle est très-utile pour démontrer que la ligne perpendiculaire est la plus courte de toutes celles que l'on peut tirer d'un point à une même ligne droite: c'est à dire que si la ligne FC est perpendiculaire à la ligne AB, elle est plus petite que la ligne FE, qui est oblique, parce que cette perpendiculaire FC est opposée à l'angle aigu FEC, qui est plus petit que l'angle droit C, auquel l'oblique FE, est opposé.

Planche 2. 32. Fig.

PROPOSITION XX.

THEOREME XIII.

En tout triangle deux côtez quelconques pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme.

Quoy qu'Archimede ait pris cette Proposition pour un Axiome, nous ne laisserons pas neanmoins de la démontrer à la maniere d'Euclide. Je dis donc, que du triangle ABC, les deux côtez par exemple AB, AC, pris ensemble sont plus grands que le troisiéme côté BC.

Planche 3. 42. Fig.

Planche 3. 42. Fig.

PREPARATION.

Prolongez l'un des deux côtez AB, AC, comme AC en D, en sorteque la ligne AD soit égale à l'autre côté AB, & joignez la droite BD.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez AB, AD, du triangle ABD, seront égaux, *par constr.* l'angle D est égal à l'angle ABD, *par Prop.* 5. & par consequent moindre que l'angle DBC : c'est pourquoy le côté CD, ou les deux AB, AC, sont plus grands que le côté BC, *par Prop.* 19. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Au lieu de prolonger le côté AC, on peut *par Prop.* 9. diviser l'angle BAC, en deux également par la ligne AE, & alors on connoîtra, *par Prop.* 16. que l'angle exterieur BEA est plus grand que l'interieur opposé EAC, ou EAB, & que par consequent le côté AB est plus grand que le côté BE, *par Prop.* 19. On connoîtra de la même façon que l'angle exterieur CEA est plus grand que l'interieur opposé EAB, ou EAC, & que par consequent le côté AC est plus grand que le côté EC. D'où il est aisé de conclure que les deux côtez AB, AC, sont ensemble plus grands que les deux EB, EC, c'est à dire que tout le côté BC.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que la ligne droite est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut tirer d'un point à un autre point.

USAGE.

Cette Proposition sert de Lemme à la suivante, dont le Corollaire precedent est encore une suite, & je n'ay pas remarqué qu'elle ait d'autres usages considerables.

PRO-

Planche 3. Fig. 43.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XIV.

Si d'un point pris à discretion au dedans d'un triangle, on tire aux extremitez de l'un de ses côtez, deux lignes droites, elles seront ensemble plus petites que les deux autres côtez de ce triangle; mais elles feront un plus grand angle.

JE dis que si du point D, pris à volonté dans le triangle ABC, on tire aux extremitez A, B, du côté AB, les droites DA, DB, leur somme DA + DB, sera plus petite que la somme AC + BC, des deux autres côtez AC, BC: & que l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB.

DEMONSTRATION.

Dans le triangle AEC, que l'on a en prolongeant AD vers E, la somme AC + CE est plus grande que AE, *par Prop.* 20. c'est pourquoy si à chacune de ces deux grandeurs inégales on ajoûte EB, on connoîtra *par Ax.* 4. que la somme AC + BC est plus grande que la somme AE + EB. Pareillement dans le triangle DEB, la somme DE + EB, est plus grande que BD, *par Prop.* 20. & ajoûtant AD, on aura, *par Ax.* 4. la somme AE + EB plus grande que la somme AD + BD. Mais la somme AC + BC a été démontrée plus grande que la somme AE + EB. Donc la somme AC + BC sera à plus forte raison plus grande que la somme AD + BD. *Ce qui est l'une des deux choses qu'il falloit démontrer.*

L'Angle exterieur ADB est plus grand que l'interieur opposé DEB, lequel étant exterieur à l'égard du triangle AEC, est aussi plus grand que l'interieur opposé ACE, *par Prop.* 16. Donc à plus forte raison, l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB. *Ce qui restoit à démontrer.*

SCOLIE.

Si l'on tire la droite CDF, on pourra démontrer autrement, que l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB: si l'on considere que l'angle exterieur ADF est plus grand que l'interieur opposé ACD, *par Prop.* 16. & que pareillement l'angle exterieur BDF est plus grand que l'interieur opposé BCD,

pour

Planche 3. 43. Fig. pour conclure de là que la somme des deux angles ADF, BDF, c'est à dire tout l'angle ADB, est plus grand que la somme des deux ACD, BCD, ou que tout l'angle ACB.

Si l'on décrivoit sur la même base AB, un autre triangle au dedans du triangle ADB, & ainsi ensuite, on démontreroit comme auparavant, que les deux côtez de ce dernier triangle seroient ensemble moindres que les deux côtez du triangle precedent. D'où il est aisé de conclure que la somme de ces deux côtez allant toûjours en diminuant jusques à la ligne droite AB, cette ligne droite AB est la plus petite de toutes celles que l'on peut tirer par ses deux extremitez A, B.

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer un cas de la *Prop.* 8. 3. elle peut aussi servir pour démontrer la *Prop.* 21. 11. & nous nous en servirons tres-utilement dans la Trigonometrie Spherique, pour démontrer que *dans un Triangle Spherique les trois angles pris ensemble sont plus grands que deux droits.*

PROPOSITION XXII.

PROBLEME VIII.

Décrire un Triangle de trois lignes données, dont la plus grande doit être moindre que la somme des deux autres.

44. Fig. Pour décrire un Triangle, dont les trois côtez soient égaux aux trois lignes AB, AC, AD, dont la plus grande AD doit être moindre que la somme des deux autres AB, AC, autrement le Probléme seroit impossible, parce que par Probl. 20. dans tout triangle la somme de deux côtez quelconques est plus grande que le troisiéme, si vous voulez que la seconde ligne donnée AC serve de base au triangle qu'on cherche, décrivez de son extremité A, un arc de cercle à l'ouverture de l'une des deux autres lignes données AB, AD, comme de AB: & à l'intervalle de la derniere ligne donnée AD, décrivez de l'autre extremité B, un autre arc de cercle, qui coupe icy le premier au point E, duquel on tirera aux deux points A, C, les droites EA, EC, & le triangle ABE sera celuy qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Planche 3. 43. Fig.

Puisque l'arc de cercle décrit du point A, a été fait à l'intervalle de AB, le côté AE doit necessairement être égal à la ligne AB : & pareillement le côté CE est égal à la ligne AD ; ainsi les trois côtez du triangle ACE sont égaux aux trois lignes données AB, AC, AD. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Ce Problême semble n'avoir été icy mis par Euclide, que pour resoudre le suivant ; parce que son usage ne revient pas dans la suite. Mais on peut s'en servir tres-utilement, pour décrire une figure égale à une autre, que pour cette fin, quand elle a plus de trois côtez, se doit reduire en triangles par plusieurs *Diagonales* ; ou lignes droites tirées d'un angle à l'autre, pour faire à part d'autres triangles en même ordre, qui ayent tous les côtez égaux à tous les côtez des triangles, qui se trouveront dans la figure proposée. Cela se peut même executer, pour le moins en faisant une figure semblable, quand la figure proposée sera sur le terrain, c'est à dire quand on voudra lever un Plan accessible sur la terre : sçavoir en prenant tous les côtez d'autant de petites parties prises sur une Echelle que les côtez des triangles du Plan proposé auront de pieds, ou de toises, comme vous avez vû au *Probl.* 16. *Introd.*

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME IX.

Faire au point donné d'une ligne droite donnée, un angle égal à un angle donné.

Pour faire au point donné D, de la ligne donnée DE, un angle égal à l'angle donné ABC, tirez par les deux points F, G, pris à discretion sur les lignes AB, AC, la droite FG, & faites *par Prop.* 22. des trois lignes BF, BG, FG, le triangle DHI, en sorte que les deux côtez DH, DI, qui sont autour du point donné D, soient égaux aux deux côtez BF, BG, qui font l'angle proposé B ; & l'angle D sera égal à l'angle donné B. 45. Fig.

Planche 3. 45. Fig.

DEMONSTRATION.

Puisque les trois côtez du triangle DHI, sont égaux *par constr.* aux trois côtez du triangle BFG; ces deux triangles BFG, DHI, seront égaux entre eux, *par Prop.* 8. & l'angle D sera égal à l'angle B, parce qu'ils sont opposez à côtez égaux. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert non seulement pour la démonstration de la suivante, & pour résoudre la 42: mais encore pour la résolution des *Prop.* 33. *&* 34. *l.* 3. & aussi les *Prop.* 2. *&* 3. *l.* 4. On s'en sert aussi pour lever un Plan accessible, ou inaccessible qui est sur la terre, comme vous avez vû aux *Probl.* 16. *&* 17. *Introd.*

Enfin on s'en sert dans la Gnomonique, dans la Perspective, dans la Fortification, & dans toutes les autres parties de Mathematique, où l'on met en usage la Regle & le Compas, & principalement dans la *Geodesie*, c'est à dire dans la Division des Champs, dont la plûpart des pratiques seroient impossibles, si l'on ne sçavoit faire un angle égal à un autre, ou de tel nombre de degrez qu'on voudra.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XV.

Si deux Triangles ont deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, celuy qui a le plus grand angle compris par ces deux côtez égaux, à la plus grande Base.

QUoique cette Proposition soit comme un Corollaire de la quatriéme, neanmoins comme ce Corollaire ne dépend proprement que des sens, & que sa certitude en doit être connuë par la raison, & par les principes dont elle dépend, nous en ferons la démonstration à la maniere d'Euclide en cette sorte.

46. Fig. Je dis donc que si le côté AC du triangle ABC, est égal au côté DF du triangle DEF, & le côté BC égal au côté EF: mais que l'angle compris ACB soit plus grand que l'angle compris DFE; la base AB sera plus grande que la base DE.

PRE-

Planche 3. 46. Fig. I

PREPARATION.

Faites *par Prop.* 23. au point F, de la ligne DF, l'angle DFG égal à l'angle C, par la ligne FG; laquelle tombera necessairement au dehors du triangle DEF, parce que l'angle DFE est supposé moindre que l'angle C. Faites la ligne FG égale à la ligne BC, & joignez la droite DG.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne DF est égale à la ligne AC, *par supp.* & la ligne DC égale à la ligne FG, *par constr.* & aussi l'angle C égal à l'angle DFG, *par constr.* les deux triangles ABC, DEF, seront égaux entre eux, *par Prop.* 4. & la base AB sera égale à la base DG.

Parce que les côtez EF, FG, sont égaux chacun au même côté BC, *par constr.* il s'ensuit *par Ax.* 1. que ces côtez FG, FE, sont égaux, & que *par Prop.* 5. l'angle FEG est égal à l'angle FGE, & par consequent plus grand que l'angle DGF, lequel à plus forte raison sera moindre que l'angle DEG, ce qui rend *par Prop.* 19. la ligne DG, ou AB son égale, comme il a été démontré, plus grande que DE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert non seulement pour démontrer la suivante, qui est son inverse, mais encore pour démontrer un cas des *Prop.* 7. & 8. *l.* 3. & un cas de la *Prop.* 15. *l.* 3.

PROPOSITION XXV.

THEOREME XVI.

De deux Triangles, qui ont deux côtez égaux, chacun au sien, celuy qui a la plus grande base, a l'angle opposé à cette base, aussi plus grand que l'angle opposé à la base la plus petite.

JE dis que si le côté AC du triangle ABC est égal au côté DF du triangle DEF, & le côté BC égal au côté EF; mais la base AB plus grande que la base DE; l'angle C est plus grand que l'angle DFE.

Manche 31 46. Fig.

DEMONSTRATION.

Premierement l'angle C ne peut pas être égal à l'angle DFE, parceque *par Prop.* 4. la base AB seroit égale à la base DE, & neanmoins elle est supposée plus grande. Le même angle C ne peut pas aussi être plus petit que l'angle DFE, parce que *par Prop.* 24. la base AB seroit plus petite que la base DE, & neanmoins on la suppose plus grande. Donc *par Ax.* 1. l'angle C est plus grand que l'angle DFE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Quoique cette démonstration ne soit pas directe, elle ne laisse pas de convaincre l'esprit de la verité de cette Proposition, & il semble qu'Euclide ne l'a icy mise, que parce qu'elle est tres-facile.

Si vous en voulez une directe, faites au point D, *par Prop.* 23. l'angle EDH égal à l'angle A, par la ligne DH, égale à la ligne AC, ou DF son égale *par supp.* & ayant prolongé la base DE en I, en sorte que la ligne DI soit égale à la base AB, joignez la droite HI, qui se trouve icy coupée en K, par le côté EC prolongé, joignez encore la droite FH.

Cette preparation étant faite, on connoîtra que puisque les deux côtez DH, DI, du triangle DHI, sont égaux aux deux côtez AC, AB, du triangle ABC, & l'angle compris HDI égal à l'angle compris A, *par construct.* ces deux triangles ABC, HDI, sont égaux entre eux, *par Prop.* 4. & par consequent le côté BC, ou EF égal au côté HI, & l'angle C égal à l'angle DHI. D'où il suit que la ligne KF est plus grande que la ligne KH; & que *par Prop.* 18. l'angle FHK est plus grand que l'angle HFK: & parce que, *par Prop.* 5. l'angle DFH est égal à l'angle DHF, à cause des deux côtez égaux DF, DH, *par construct.* il s'ensuit *par Ax.* 4. que tout l'angle DHK, ou l'angle C, qui luy a été démontré égal, est plus grand que tout l'angle DFE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXVI. Planche 3. 46. Fig.

THEOREME XVII.

Le Triangle qui a deux angles égaux à ceux d'un autre, & un côte semblablement posé pareillement égal, luy est égal en tout sens.

JE dis que si l'angle A du triangle ABC, est égal à l'angle FDE du triangle DFE; & l'angle B égal à l'angle E; & de plus le côté AB égal au côté DE, qui sont compris entre les deux angles égaux, ou bien le côté AC égal au côté DF, qui sont opposez aux angles égaux B, E; ces deux Triangles ABC, DEF, sont entierement égaux. 47. Fig.

PREPARATION.

Dans la supposition du côté AB égal au côté DE, prenez sur le côté EF, la ligne EG, égale au côté BC, sans considerer où le point G tombe, & joignez la droite DG: & dans la supposition du côté AC égal au côté DF, prenez sur le côté DE, la ligne DH égale au côté AB, sans considerer où le point H tombe, & joignez la droite FH.

DEMONSTRATION.

Parce que *par la supp.* 1. le côté AB du triangle ABC, est égal au côté DE, du triangle DEF, & l'angle B, égal à l'angle E, & que le côté EG a été fait égal au côté BC, les deux triangles ABC, DGE, seront égaux entre eux, *par Prop.* 4. & l'angle GDE sera égal à l'angle A, & par consequent à l'angle FDE. D'où il suit que la ligne DG tombe sur la ligne DF, & par consequent le point G sur le point F. C'est pourquoy le côté EF sera égal au coté EG, & par consequent au côté BC, & *par Prop.* 4. le triangle ABC sera égal au triangle DEF. *Ce qui est l'un des cas qu'il falloit démontrer.*

Parce que *par supp.* 2. le côté AC du triangle ABC, est égal au côté DF, du triangle DFH, & l'angle compris A égal à l'angle compris FDE, & que le côté DH a été fait égal au côté AB, ces deux triangles ABC, DFH, seront égaux entre eux, *par Prop.* 4. & l'angle DHF sera égal à l'angle B, & par consequent à l'angle E, que l'on suppose égal à l'angle B. D'où il suit que le point H doit tomber sur le point E, autrement on a un angle exterieur

égal à son interieur opposé, ce qui est contre la *Prop.* 16. & que par consequent le côté DH, ou AB, est égal au côté DE. C'est pourquoy *par Prop.* 4. le triangle ABC est égal au triangle DEF. *Ce qui restoit à démontrer.*

Planche 3. 47. Fig.

USAGE.

Planche 2. 31. Fig.

Euclide ne se sert pas souvent de cette Proposition, quoy qu'elle soit tres-utile dans plusieurs rencontres. On s'en peut servir pour démontrer que dans un triangle isoscéle, comme ABC, si l'on divise l'angle C compris par les deux côtez égaux AC, BC, en deux également par la droite CD, cette droite CD coupera la base AB à angles droits & en deux également au point D: ou bien si du même angle C, on tire sur la base AB, la perpendiculaire CD, cette perpendiculaire CD divisera la base AB en deux également, à cause des deux triangles égaux ADC, BDC, qui ont les angles égaux, chacun au sien, & un côté égal semblablement posé, sçavoir le côté commun CD.

Planche 4. 48. Fig.

Nous nous servirons aussi dans la Gnomonique de cette Proposition, pour démontrer la maniere que nous y enseignerons, pour trouver le centre diviseur d'une ligne droite, qui represente sur un Plan un grand cercle de la Sphere: & l'on peut se servir tres-utilement de la même Proposition, pour mesurer sur la terre une ligne qui est seulement accessible par l'une de ses deux extremitez, comme AB, que je suppose accessible vers A, où l'on doit faire par le moyen d'un Graphometre, ou autrement l'angle droit BAC, par la ligne AC, d'une longueur volontaire: aprés quoy on doit se transporter au point C, pour mesurer la quantité de l'angle ACB, & en faire un égal de l'autre côté au même point C, comme ACD, par la ligne CD, laquelle étant prolongée autant qu'il en sera besoin, rencontrera la ligne AB aussi prolongée en quelque point, comme D; & alors il n'y aura plus qu'à mesurer avec un cordeau, ou autrement, la ligne AD, qui sera égale à la ligne proposée AB, à cause de l'égalité des deux triangles ACB, ACD, qui ont les angles égaux, & un côté égal semblablement posé, sçavoir le côté commun AC.

PRO-

Planche 3.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XVIII.

Si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites fait les angles interieurs opposez alternativement égaux entre eux : ces deux lignes seront paralleles entre elles.

JE dis que si la droite HF, coupe les deux AB, CD, en sorte que les deux angles interieurs alternativement opposez AEF, EFD, qu'on appelle *Angles alternes*, sont égaux entre eux ; ces deux lignes AB, CD, sont paralleles entre elles. 50. Fig.

DEMONSTRATION.

Car si les deux lignes AB, CD, n'étoient pas paralleles, étant prolongées elles se rencontreroient en quelque point, comme en G, & alors elles feroient le triangle EFG, dont l'angle exterieur AEF seroit égal à son interieur opposé EFG, contre ce qui a été démontré dans la *Prop.* 16. Ainsi les deux lignes AB, CD, ne peuvent pas concourir, & *par Déf.* 35. elles doivent être paralleles entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Cette Proposition est une suite de la remarque que nous avons faite dans la *Prop.* 16. On la peut démontrer directement, en tirant par *Prop.* 12. du point F, la ligne FI, perpendiculaire à la ligne AB, & en prenant la ligne FK égale à la ligne EI, pour joindre la droite EK : aprés quoy on connoîtra *par Prop.* 4. que les deux triangles EIF, EKF, sont égaux entre eux, à cause des deux côtez EI, EF, égaux aux deux KF, EF, & de l'angle compris IEF égal à l'angle compris EFK ; *par supp.* D'où il suit que l'angle K est égal à l'angle I, & par consequent droit, & que la ligne EK est perpendiculaire à la ligne CD, & de plus que cette perpendiculaire EK, est égale à la ligne FI qui est aussi perpendiculaire à la ligne AB, *par constr.* ce qui fait que les deux lignes AB, CD, sont également éloignées entre elles, & consequemment paralleles. Planche 4. 51. Fig.

USAGE.

On peut par cette Proposition connoître quand deux lignes sur la terre ou sur le papier, sont paralleles, ce qui arri-

vera lorsque les angles alternes seront égaux. Elle sert aussi pour tirer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée, comme vous verrez dans la *Prop.* 31. & comme vous avez déja vû au *Probl.* 3. *Introd.* Elle sert encore pour démontrer la *Prop.* 32. & plusieurs autres, comme vous verrez dans la suite.

Planche 4. 41. Fig.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XIX.

Si une ligne droite coupant deux autres lignes droites, fait avec elles l'angle exterieur égal à son opposé interieur de même part, ou bien les deux interieurs de même côté égaux ensemble à deux droits; ces deux lignes droites seront paralleles entre elles.

Planche 4. 51. Fig.

JE dis que si la droite HF, coupe les deux AB, CD, en sorte que l'angle exterieur HEB soit égal à l'interieur opposé du même côté EFD, ou que les deux interieurs de même part BEF, EFD, soient ensemble égaux à deux droits, les deux lignes AB, CD, sont paralleles.

DEMONSTRATION.

Puisque l'angle EFD est égal à l'angle HEB, *par supp.* & l'angle AEF égal au même angle HEB, *par Prop.* 15. il s'ensuit *par Ax.* 1. que l'angle AEF est égal à l'angle EFD, & *par Prop.* 27. que les lignes AB, CD, sont paralleles entre elles. *Ce qui est l'une des deux choses qu'il falloit démontrer.*

Puisque les deux angles BEF, EFD, sont aussi ensemble égaux à deux droits, *par supp.* & que les deux BEF, AEF, sont aussi ensemble égaux à deux droits, *par Prop.* 13. il s'ensuit *par Ax.* 3. que si de ces deux sommes égales on ôte l'angle commun BEF, il restera l'angle AEF égal à l'angle EFD, & que *par Prop.* 27. les deux lignes AB, CD, sont paralleles. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition a les mêmes usages que la precedente, & de plus elle sert à convaincre l'esprit de la verité de l'onziéme Axiome d'Euclide, car il est évident que les deux angles interieurs BEF, EFD, qui sont d'un même côté étant égaux

égaux ensemble à deux droits, les lignes AB, CD, sont paralleles, & que ces deux angles ne sçauroient devenir si peu moindres que deux droits, que les deux lignes AB, CD, ne se rencontrent étant prolongées du même côté. Planche 3. 50. Fig.

LEMME.

La ligne droite qui est perpendiculaire à l'une de deux paralleles, est aussi perpendiculaire à l'autre.

JE dis que si la ligne EF est perpendiculaire à l'une des deux paralleles AB, CD, comme par exemple à la ligne CD, elle est aussi perpendiculaire à la ligne AB. Planche 3. 49. Fig.

PREPARATION.

Prenez sur la ligne CD les deux lignes égales FG, FH, d'une grandeur volontaire, & tirez les deux points G, H, par Prop. 11. *les lignes GI, HK, perpendiculaires à la même ligne CD. Joignez encore les droites FI, FK.*

DEMONSTRATION.

Parce que le côté FG du triangle FGI rectangle en G, est par constr. *égal au côté FH du triangle FHK rectangle en H, & le côté GI, égal au côté HK,* par Ax. 11. *ces deux triangles rectangles FGI, FHK, seront égaux entre eux,* par Prop. 4. *& la base FI sera égale à la base FK, & les deux angles GFI, HFK, seront égaux, lesquels étant ôtez des deux angles GFE, HFE, qui sont égaux,* par Déf. 10. *parce qu'ils sont droits,* par supp. *il restera* par Ax. 3. *les deux angles égaux EFI, EFK,* & par Prop. 4. *les deux triangles IEF, KEF, seront égaux entre eux, parce qu'ils ont le côté commun EF le côté FI égal au côté FK, & l'angle compris EFI égal à l'angle compris EFK, comme il a été démontré. C'est pourquoy l'angle IEF sera égal à l'angle KEF,* & par Déf. 10. *ces deux angles seront droits, & la ligne EF sera perpendiculaire à la ligne AB.* Ce qu'il falloit démontrer.

Planche 4. Fig.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XX.

Si une ligne droite coupe deux paralleles, les angles alternes seront égaux entre eux : l'angle exterieur sera égal à l'interieur opposé de même côté : & les deux interieurs de même côté seront ensemble égaux à deux droits.

JE dis que si la droite GF coupe les deux paralleles AB, CD, les angles alternes AEF, EFD, sont égaux entre eux : l'angle exterieur GEB est égal à l'interieur opposé de même côté EFD, & que les deux interieurs de même côté BEF, EFD, sont ensemble égaux à deux droits.

PREPARATION.

Tirez des deux points E, F, les droites EK, FI, perpendiculaires aux deux AB, CD.

DEMONSTRATION.

Les deux lignes FI, KE, sont égales entre elles, *par Ax.* 11. & chacune sera, *par le Lemme precedent*, perpendiculaire aux deux paralleles AB, CD: ainsi les deux angles IFK, EKF, seront droits, & par consequent égaux ensemble à deux droits, ce qui fait que *par Prop.* 28. les deux lignes FI, KE, sont paralleles, ausquelles les deux IE, FK, étant perpendiculaires sont égales entre elles, *par Ax.* 11. C'est pourquoy *par Prop.* 8. les deux triangles FIE, FKE, seront égaux entre eux, & l'angle IEF sera égal à l'angle EFK. *Ce qui est l'une des trois choses qu'il falloit démontrer.*

Puisque l'angle AEF a été démontré égal à l'angle EFD, & qu'il est aussi égal à l'angle GEB, *par Prop.* 15. il s'ensuit *par Ax.* 1. que l'angle GEB est égal à l'angle EFD. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Enfin puisque les deux angles BEF, AEF, sont ensemble égaux à deux droits, *par Prop.* 13. si à la place de l'angle AEF, on prend son alterne EFD, qui luy a été démontré égal, on connoîtra que les deux angles BEF, EFD, sont ensemble égaux à deux droits. *Ce qui restoit à démontrer.*

USA-

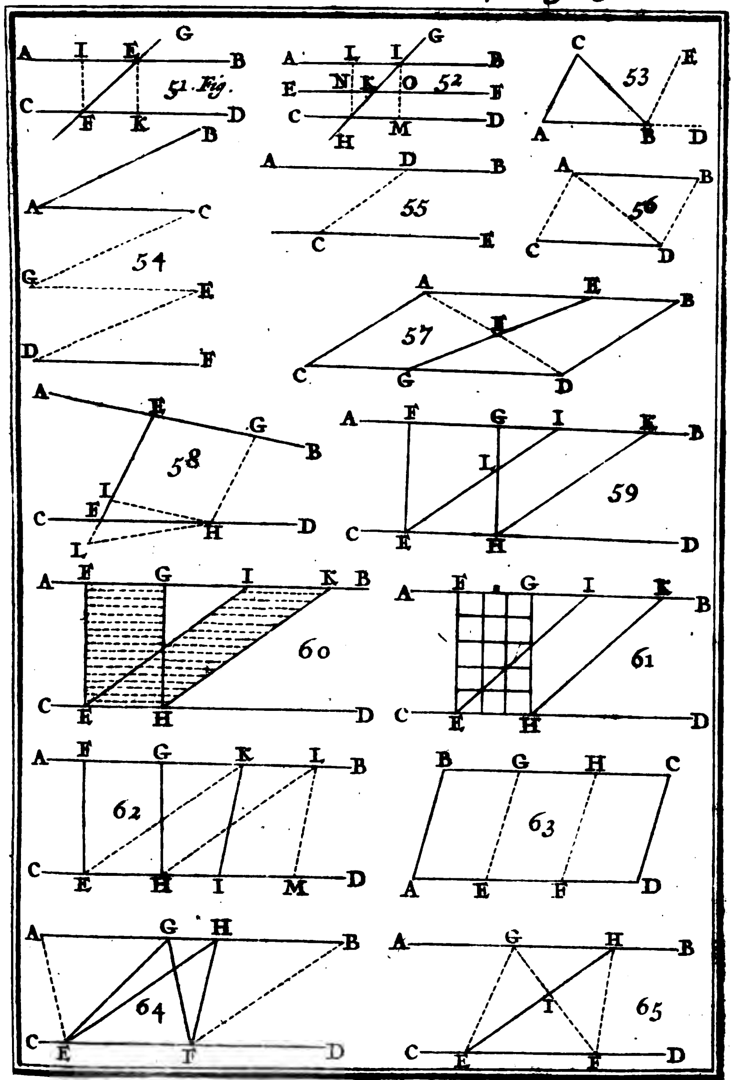

51. Fig.
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65

Planche 4.

USAGE.

51. Fig.

Nous avons déja dit dans les remarques que nous avons faites sur l'Euclide du P. Dechales, que cette Proposition sert aussi à démontrer l'onziéme Axiome d'Euclide, qui porte que *si une ligne droite tombant sur deux autres, fait les deux angles interieurs d'un même côté plus petits ensemble que deux droits, ces lignes étant prolongées se rencontreront de ce côté*; car si elles ne se rencontroient pas, c'est à dire si elles ne concouroient jamais, elles seroient paralleles *par Déf.* 35. parce qu'on les suppose droites, & ainsi comme il vient d'être démontré, les angles interieurs seroient ensemble égaux à deux droits, contre la supposition de cette maxime. Nous démontrerons encore mieux cet Axiome sur la fin de la *Prop.* 34.

PROPOSITION XXX.

THEOREME XXI.

Les lignes droites paralleles à une même ligne droite, sont paralleles entre elles.

JE dis que si chacune des deux lignes droites AB, CD, est parallele à la même ligne EF, ces deux lignes AB, CD, sont paralleles entre elles. 52. Fig.

PREPARATION.

Tirez à volonté la ligne droite GH, qui coupe les trois lignes proposées AB, EF, CD, en trois points, comme I, K, H.

DEMONSTRATION.

Puisque les deux lignes AB, EF, sont paralleles, *par supp.* l'angle GIB sera égal à l'angle IKF, *par Prop.* 29. & pareillement puisque l'on suppose que les deux lignes EF, CD, sont paralleles, l'angle KHD, sera égal au même angle IKF. D'où il suit *par Ax.* 1. que l'angle GIB est égal à l'angle KHD, & que *par Prop* 28. les deux lignes AB, CD, sont paralleles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Planche 4. 53. Fig. Cette Proposition se peut démontrer autrement & tres-facilement, en tirant à volonté les deux lignes LH, IM, perpendiculaires à la ligne EF, lesquelles seront aussi perpendiculaires à chacune des deux lignes AB, CD, par le Lemme precedent, & en raisonnant de la sorte.

Les deux lignes LN, IO, sont égales entre elles, par Ax. 11. aussi-bien que les deux HN, MO: c'est pourquoy par Ax. 2. les deux lignes LH, IM, seront aussi égales entre elles, & par Def. 35. les deux lignes AB, CD, seront paralleles entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Les trois lignes AB, CD, EF, sont icy supposées par Euclide dans un même Plan, autrement les deux démonstrations precédentes seroient imparfaites. Mais dans la *Prop.* 9. l. 11. Nous démontrerons la verité de ce Theorême, quoique ces trois lignes ne soient pas dans un même Plan.

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition, pour démontrer que *si deux lignes droites qui se coupent, sont paralleles à deux autres lignes droites qui se coupent dans un même Plan; ces quatre lignes droites comprennent deux angles égaux.*

54. Fig. Comme si les deux lignes AB, AC, sont paralleles aux deux DE, DF, sçavoir AB à DE, & AC à DF, les deux angles A, D, sont égaux entre eux.

PREPARATION.

Tirez du point C pris à volonté sur la ligne AC, la droite CG parallele à la ligne AB, & du point E pris à discretion sur la ligne DE, la droite EG, parallele à la ligne AC: cette ligne EG rencontrera la premiere CG, en quelque point, comme G.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes GC, DE, sont paralleles à la même AB, les trois AB, GC, DE, seront paralleles entre elles, comme il vient d'être démontré, & pareillement parce que les deux lignes GE, DF, sont paralleles à la même AC, les trois AC, GE, DF, seront paralleles entre elles. C'est pourquoy par *Prop.* 29. tous les angles alternes A, C, G, D, & par consequent les deux A, D, seront égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Quoi-

Quoique les deux angles A, D, ne soient pas dans un même Plan, ils ne laissent pas d'être égaux entre eux, pourvû que leurs lignes demeurent paralleles, chacune à chacune, comme il sera démontré dans *Prop*. 10. 11. Planche 4. 54 Fig. 2

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME X.

Tirer par un point donné une ligne droite parallele à une ligne donnée.

POur tirer par le point donné C une ligne parallele à la ligne donnée AB, tirez à volonté par le point donné C, la droite CD, qui coupe la ligne proposée AB, en quelque point comme D, & faites, *par Prop*. 23. au point C, l'angle DCE égal à l'angle ADC, par la droite CE, qui sera parallele à AB. 55. Fig.

DEMONSTRATION.

Les angles alternes ADC, DCE, sont égaux *par constr*. Donc *par Prop*. 27. les lignes AB, CD, sont paralleles. *Ce qu'il falloit faire & demontrer.*

USAGE.

L'usage des lignes paralleles est aussi frequent que celuy des perpendiculaires, étant certain que l'on ne sçauroit par exemple rien pratiquer dans la Perspective, sans tirer plusieurs lignes paralleles, ou ce qui est la même chose, sans tirer plusieurs perpendiculaires à la ligne de terre ; parce que toutes les lignes perpendiculaires à une même ligne, sont paralleles entre elles, comme il est évident *par Prop*. 28. Dans la description des Cadrans Polaires, on tire les lignes horaires paralleles entre elles & à la ligne substylaire, parce que ces sortes de Cadrans n'ont point de centre, comme nous démontrerons dans la Gnomonique. La Fortification ne sçauroit se passer de lignes paralleles, comme quand on veut tracer l'ichnographie des Parapets, des Talus, des Relais, de l'Esplanade, &c.

PRO-

Planche 4. 53. Fig.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

En tout triangle, l'un des côtez étant prolongé, l'angle exterieur est égal aux deux interieurs opposez pris ensemble, & les trois angles du triangle sont ensemble égaux à deux droits.

JE dis que si du triangle ABC, on prolonge le côté AB vers D, l'angle exterieur CBD est égal aux deux interieurs A, C, pris ensemble, & que les trois angles A, ABC, C, sont ensemble égaux à deux droits.

PREPARATION.

Faites *par Prop.* 23. au point B, l'angle DBE égal à l'angle A, par la ligne BE, qui sera parallele à la ligne AC, *par Prop.* 28. & *par Prop.* 29. l'angle C sera égal à l'angle CBE.

DEMONSTRATION.

Puisque l'angle CBE est égal à l'angle C, & l'angle DBE à l'angle A, les deux angles A, C, pris ensemble, seront égaux aux deux DBE, CBE, pris ensemble, c'est à dire à tout l'angle exterieur CBD. *Ce qui est l'une des deux choses qu'il falloit démontrer.*

Puisque l'angle exterieur CBD est égal aux deux interieurs opposez A, C, si de chaque côté on ajoûte l'angle ABC, on connoîtra que les trois angles A, ABC, C, sont ensemble égaux aux deux ABC, CBD, c'est à dire à deux droits, *par Prop.* 13. *Ce qui restoit à démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de cette Proposition, que les trois angles d'un triangle sont ensemble égaux aux trois angles pris ensemble d'un autre triangle.

COROL.

Planche 4. 53. Fig.

COROLLAIRE II.

Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun au sien, le troisiéme angle de l'un sera égal au troisiéme angle de l'autre.

COROLLAIRE III.

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus pris ensemble sont precisément égaux à un droit.

COROLLAIRE IV.

Chaque angle d'un triangle équilateral est de 60 degrez, parce qu'il est le tiers de deux droits, qui font 180. degrez.

COROLLAIRE V.

Tous les angles d'un Polygone valent autant de fois 180 degrez, que le Polygone a de côtez, moins deux, parce qu'il est divisible en autant de triangles. D'où il suit que d'une figure de quatre côtez, les quatre angles sont ensemble quatre droits, c'est à dire 360 degrez.

COROLLAIRE VI.

Dans tout Polygone, chaque côté étant prolongé, tous les angles exterieurs pris ensemble sont égaux à quatre droits, ou à 360 degrez. Cela s'ensuit de cette proposition, & de la *Prop.* 13.

USAGE.

Cette Proposition est tres-utile dans plusieurs Propositions de ce Livre & des suivans, & aussi dans toute la Trigonometrie, qui ne considere un Triangle qu'à l'égard de ses angles, ou de ses côtez Elle est tres-utile pour mesurer sur la terre un angle inaccessible, comme vous avez vû dans l'usage de la *Prop.* 15. Les Ingenieurs s'en servent tres-utilement pour lever des Plans, & ils connoissent quand ils ont bien mesuré les angles d'un Plan, lorsque tous les angles de ce Plan font ensemble autant de fois 180 degrez, que le Plan de côtez moins deux.

Planche 5. 56. Fig.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME. XXIII.

Les lignes droites sont égales & paralleles, qui joignent de même part les extremitez de deux autres lignes droites & paralleles.

JE dis que si les deux lignes droites AB, CD, sont paralleles & égales, les droites AC, BD, qui joignent leurs extremitez, sont aussi paralleles & égales.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire la droite AD, on connoîtra *par Prop.* 4. que les deux triangles ADB, ADC, sont égaux entre eux, parce qu'ils ont le côté commun AD, le côté AB égal au côté CD, *par supp.* & l'angle compris ADC égal à l'angle compris BAD, *par Prop.* 29. c'est pourquoy la ligne AC sera égale à la ligne BD; *Ce qui est l'une des deux choses qu'il falloit démontrer*: & l'angle DAC sera égal à l'angle ADB, ce qui fait que *par Prop.* 27. les deux mêmes lignes AC, BD, seront paralleles entre elles. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 35. & aussi pour mesurer sur la terre une ligne accessible par ses deux extremitez, & inaccessible par son milieu, comme nous enseignerons dans nôtre *Geometrie Pratique.*

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXIV.

En tout parallelogramme les angles & les côtez opposez sont égaux entre eux, & la diagonale le divise en deux également.

56. Fig. JE dis que si la figure ABDC est un Parallelogramme, les angles opposez B, C, sont égaux entre eux, aussi bien que les deux BAC, BDC: & pareille-

pareillement que les côtez opposez AB, CD, sont égaux entre eux aussi-bien que les deux AC, BD: & enfin que la diagonale AD divise le Parallelogramme ABDC en deux également. C'est à dire que les deux triangles ADB, ADC, sont égaux entre eux. Planche 4. 56. Fig.

DÉMONSTRATION.

Parce que les deux lignes AB, CD, sont paralleles, *par Supp*, les deux angles alternes BAD, ADC, seront égaux entre eux, *par Prop.* 29. aussi-bien que les deux alternes ADB, DAC, à cause des deux paralleles AC, BD. D'où il suit *par Prop.* 32. que le troisiéme angle B sera égal au troisiéme angle C, & *par Ax.* 2. tout l'angle BAC égal à tout l'angle BDC. *Ce qui est l'une des trois choses qu'il falloit démontrer.*

Puisque donc les deux triangles ADB, ADC, sont équiangles, & qu'ils ont le côté commun AD, semblablement posé, ils seront égaux entre eux *par Prop.* 26. *Ce qui est la seconde des trois choses qu'il falloit démontrer.*

Enfin les côtez opposez à angles égaux des deux triangles égaux ADB, ADC, sçavoir AB, CD, & AC, BD, seront égaux entre eux. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

La methode que vous trouverez dans nôtre *Geometrie Pratique*, pour mesurer la hauteur & la largeur d'une Montagne, par le moyen d'un Plomb & d'une longue regle, ce qu'on appelle *Cultellation*, est fondée sur cette Proposition, laquelle sert aussi pour faire le partage d'un champ, quand il est un Parallelogramme, pour le moins lorsqu'on le veut diviser en deux également, ce qui se fait par la Diagonale AD, quand on n'a aucun point déterminé pour faire cette division. Mais si on le veut partager en deux également par une ligne droite tirée d'un point donné sur un côté, comme par le point E, on tirera de ce point E par le point F milieu de la diagonale AD, la droite EFG, qui divisera le Parallelogramme ADBC, en deux Trapezes égaux ACGE, EGDB, à cause du triangle AFE égal au triangle DFG, *par Prop.* 26. & des deux Trapezes égaux, CF, BF, *par Ax.* 3. parce que *par Prop.* 34. les deux triangles ADB, ADC, sont égaux entre eux. 57. Fig.

On

Planche 4. 57. Fig. On connoît quand un champ quadrangulaire est un Parallelogramme, lorsque de ses quatre angles, les deux opposez sont égaux, ou bien lorsque de ces quatre côtez les deux opposez sont égaux, comme il est aisé à démontrer *par Prop* 8. Ce qui fait voir l'origine & la démonstration d'un certain instrument, dont on se sert communément pour tirer des lignes paralleles, & qui à cause de cela a été appellé *Regle parallele*, parce qu'elle est composée de deux longues regles attachées ensemble par deux autres regles plus petites & égales entre elles, qui conservent les deux grandes regles toûjours dans le Parallelisme, quelque situation qu'on leur donne.

C'est pourquoy quand on veut au moyen de cet instrument tirer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée, il n'y a qu'à appliquer l'une de ses deux Regles jointes ensemble le long de la ligne donnée, & la seconde regle demeurant ferme & immobile, on avancera la premiere jusqu'au point donné, afin que par ce point l'on puisse tirer le long de la Regle une ligne droite qui sera parallele à la proposée.

Cette Proposition sert aussi pour démontrer l'onziéme Axiome d'Euclide, comme nous avons déja fait voir dans un Livre imprimé en l'année 1690. & comme nous allons encore faire voir icy de la même façon; parce que la démonstration me semble fort simple & fort naturelle.

58. Fig. Je dis donc que si les deux lignes droites AB, CD, sont coupées par une troisiéme ligne droite EF, en sorte que les deux angles interieurs BEF, EFD, qui sont d'un même côté, soient ensemble moindres que deux droits; les deux lignes AB, CD, étant prolongées concourront de ce même côté.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer cette verité, il suffira d'avoir démontré que si du même côté des angles interieurs BEF, EFD, on tire la droite GH parallele à la ligne EF, & terminée par les deux lignes AB, CD; cette ligne GH sera plus petite que la ligne EF.

Pour cette fin tirez par le point H, la droite HI parallele à la ligne AB. Il est évident que cette ligne HI rencontre la ligne EF au point I, entre les points E, F, parce que si elle la rencontroit au delà du point F, comme en L, il s'ensuivroit que les deux angles BEF, HLF, seroient ensemble égaux à deux droits, *par Prop.* 29. & par consequent plus grands que les deux BEF, EFD, que l'on suppose moindres ensemble que deux droits, & qu'ainsi en ôtant l'angle commun BEF, il resteroit l'angle HLE plus grand que l'angle EFD, ce qui est impossible, parce que l'angle EFD étant exterieur est plus grand que l'interieur opposé HLF, *par*

Prop.

Planche 4. 58. Fig.

Prop. 16. le même point I, ne peut pas aussi tomber sur le point F, parce que les lignes AB, CD, seroient paralleles; & qu'ainsi les deux angles interieurs BEF, EFD, seroient ensemble égaux à deux droits, *par Prop*. 28. & neanmoins on les suppose moindres. Donc puisque le point I, tombe entre les deux E, F, & que la figure GHIE est un Parallelogramme, dont les côtez opposez GH, EI, sont égaux *par Prop* 34. il s'ensuit que la ligne GH est moindre que la ligne EF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXV.

Les Parallelogrammes sont égaux entre eux, quand ils ont la même base, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles.

JE dis que les Parallelogrammes EFGH, EIKH, sont égaux entre eux, parce qu'ils sont entre les deux paralleles AB, CD, & qu'ils ont la base commune EH.

DEMONSTRATION.

59. Fig.

Les côtez IK, FG, sont égaux chacun au côté EH *par Prop*. 34. & *par Ax*. 1. ils sont égaux entre eux, & si on leur ajoûte le côté GI, on aura *par Ax*. 2. le côté FI du triangle FEI égal au côté GK du triangle GHK; & parce que le côté EF est égal au côté GH, & le côté EI égal au côté HK, *par Prop*. 34. il s'ensuit *par Prop*. 8. que les deux triangles EFI, GHK, sont égaux entre eux: c'est pourquoy si de chacun on ôte le triangle commun GLI, il restera le Trapeze FL égal *par Ax*. 3. au Tapeze KL, & enfin si à chacun de ces deux Trapezes égaux FL, KL, on ajoûte le triangle ELH, on aura le Parallelogramme EFGH, égal *par*, *Ax*. 2. au Parallelogramme EIKH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Ce Theorême se peut démontrer plus facilement par la *Methode des indivisibles*, en cette sorte. Divisez par pensée le Parallelogramme EFGH en autant de petits Parallelogrammes égaux qu'il vous plaira, par des lignes paralleles entre elles & à la

Planche 4. 60. Fig. base commune EH, à laquelle elles seront toutes égales, & par consequent égales entre elles, lesquelles étant continuées diviseront l'autre Parallelogramme EIKH, en autant de Parallelogrammes égaux entre eux & aux precedens ; ce qui fait que ces deux Parallelogrammes EFGH, EIKH, sont égaux entre eux, parce que quelque division que l'on fasse, il y aura toûjours autant de lignes de même longueur & également serrées dans l'un que dans l'autre : de sorte que si la division est infinie, comme on le suppose toûjours, ce qui a fait donner le nom de *Methode des Indivisibles* à cette façon de démontrer, chaque Parallelogramme sera composé d'un nombre égal de lignes égales, c'est à dire de petits Parallelogrammes égaux, dont la largeur est infiniment petite, & ils seront par consequent égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette Methode des Indivisibles est d'un grand secours pour démontrer les Theorêmes les plus difficiles de Geometrie, principalement pour les touchantes des lignes courbes, & pour les *Quadratures*, c'est à dire pour reduire une figure curviligne en rectiligne : étant certain que par son moyen on démontre des Theorêmes, que l'on pourroit difficilement démontrer par les seuls Elemens d'Euclide. Vous en trouverez un exemple dans le premier Theorême de nôtre *Planimetrie.*

Les plus sçavans admettent la Geometrie des Indivisibles, & il n'y a que les moins habiles qui la rejettent, sans doute parce qu'ils s'y trompent facilement, pour n'en sçavoir pas bien faire une juste application, faute de bien entendre le fondement de cette nouvelle Geometrie, qui consiste principalement à prendre pour l'aire d'une surface, la somme des lignes infinies qui la remplissent, & pour la solidité d'un corps, les surfaces infinies, dont il est composé ; de sorte que deux surfaces sont estimées égales, quand chacune est remplie d'une somme égale de lignes semblables égales & paralleles entre elles : & que pareillement deux solides sont estimez égaux, quand l'un & l'autre est rempli d'une somme égale de surfaces semblables égales & paralleles entre elles ; &c.

USAGE.

61. Fig. Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & de plusieurs autres, & aussi pour mesurer un Parallelogramme qui n'est pas rectangle, comme EIKH, parce qu'on le peut reduire en un autre qui soit rectangle, sçavoir en tirant des deux extremitez E, H, du côté EH, les deux lignes EF, GH, perpendiculaires à ce côté EH, lesquelles étant terminées par l'autre côté opposé & parallele IK, prolongé autant qu'il en sera besoin, acheveront le parallelogramme rectan-

rectangle EFGH égal au Parallelogramme proposé EIKH, dont l'aire sera par consequent connuë, si on multiplie ensemble les deux côtez EF, EH, qui forment l'angle droit E: comme si EF est par exemple de 5 pieds, & EH de 3, en multipliant 5 par 3, on aura 15 pieds quarrez pour le contenu du Parallelogramme rectangle EFGH, ou de son égal EIKH. Planche 4. 61 Fig.

PROPOSITION XXXVI.

Theoreme XXVI.

Les Parallelogrammes sont égaux entre eux, quand ils ont des bases égales, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles.

Je dis que si les deux Parallelogrammes EFGH, IKLM, sont entre les mêmes paralleles AB, CD, & que leurs bases EH, IM, soient égales entre elles, ces Parallelogrammes EFGH, IKLM, sont aussi égaux entre eux. 62. Fig.

Preparation.

Joignez les deux extremitez des deux bases égales & paralleles EH, KL, par les droites EK, HL, qui seront aussi égales & paralleles, *par Prop.* 33. de sorte que, *par Déf.* 34 la Figure EKLH sera un Parallelogramme.

Demonstration.

Puisque chacun des deux Parallelogrammes EFGH, IKLM, , est égal au Parallelogramme EKLH, il s'ensuit *par Ax.* 1. qu'ils sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Scolie.

Cette Proposition est virtuellement la même que la precedente, parce qu'avoir une même base est la même chose que d'avoir des bases égales: & elle est énoncée plus generalement dans la *Prop.* 1. 6.

Quand on dit que *deux Parallelogrammes sont entre mêmes paralleles*; cela signifie que deux de leurs côtez opposez se rencontrent dans deux lignes paralleles entre elles; telles que sont icy AB, CD.

USAGE.

Planche 4. 63. Fig. On se sert tres-utilement de cette Proposition pour partager en autant de parties égales que l'on voudra un champ qui a la figure d'un Parallelogramme, comme si l'on veut diviser en trois parties égales, par exemple le Parallelogramme ABCD, on divisera deux de ses côtez opposez AD, BC, chacun en trois parties égales, & l'on joindra les points de division opposez par les droites EG, FH, qui partageront le Parallelogramme proposé ABCD, en trois Parallelogrammes plus petits qui seront égaux entre eux, puisque leurs bases sont égales entre elles.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXVII.

Les Triangles sont égaux, quand ils ont même base, & qu'ils sont renfermez entre les mêmes paralleles.

64. Fig. JE dis que si les Triangles EFG, EFH, ont la même base EF, & sont renfermez entre les mêmes paralleles AB, CD, en sorte que leurs sommets G, H, se terminent à la même ligne AB, parallele à la base commune EF; ces deux Triangles EFG, EFH, sont égaux entre eux.

PREPARATION.

Prenez sur la ligne AB, les lignes GA, HB, égales chacune à la base commune EF, & joignez la droite AE, qui sera parallele à la ligne FG, *par Prop.* 33. & la droite BF, qui sera pareillement parallele à la ligne EH.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté EG du triangle EFG est la diagonale du parallelogramme EFGA, ce triangle EFG sera la moitié du parallelogramme EFGA, *par Prop.* 34. & par la même raison le triangle EFH sera la moitié du parallelogramme EFBH: & comme les parallelogrammes EFGA, EFBH, sont égaux entre eux, *par Prop.* 35. leurs moitiez, c'est à dire les triangles EFG, EFH, seront aussi égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Planche 4. 65. Fig.

Cette Proposition sert pour démontrer que *quand deux lignes droites s'entrecoupent entre deux paralleles, leurs parties sont proportionnelles* : comme si les deux lignes EH, FG, s'entrecoupent au point I, entre les deux paralleles AB, CD leurs parties IE, IH, IF, IG, sont proportionnelles : car si l'on joint les droites EG, FH, on connoîtra *par Prop.* 37. que les deux triangles EFG, EFH, sont égaux entre eux, c'est pourquoy si de chacun on ôte le triangle commun EIF, il restera *par Ax.* 3. le triangle EIG égal au triangle FIH, & à cause des deux angles égaux EIG, FIH, *par Prop.* 15. il s'ensuit *par* 15. 6. que les quatre lignes IE, IH, IF, IG, sont proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On se sert aussi tres-utilement de cette Proposition, pour reduire en triangle une figure rectiligne, qu'on appelle d'un nom général simplement *Rectiligne*, en cette sorte.

Pour reduire premierement en triangle le Trapeze ABCD, ayant tiré à volonté la diagonale BD, tirez par l'angle C, opposé à cette diagonale, la droite CE, parallele à la même diagonale BD, & par le point E où elle rencontre le côté AB prolongé ; tirez à l'angle D, la ligne DE, & le triangle ADE sera égal au Trapeze proposé ABCD. Planche 5. 66 Fig.

DEMONSTRATION.

Puisque les deux triangles DCB, DFB, ont la même base BD, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles BD, CE, ils seront égaux entre eux, *par Prop.* 37. c'est pourquoy si de chacun l'on ôte le triangle commun BFD, il restera *par Ax.* 3. le triangle CFD égal au triangle BEF, dont chacun étant ajoûté au Trapeze ABFD, on aura *par Ax.* 2. le Trapeze ABCD égal au Triangle ADE. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

C'est de la même façon que l'on reduira en triangle une figure de plus de quatre côtez, sçavoir en la reduisant premierement en une autre qui ait un côté moins, comme vous venez de voir, & celle-cy en une autre, qui ait pareillement un côté moins, & ainsi ensuite, jusqu'à ce que l'on vienne au Triangle.

Planche 5. 67. Fig.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME XXVIII.

Les Triangles sont égaux quand ils ont des bases égales, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles.

JE dis que les deux triangles EFG, HIK, qui sont entre les mêmes paralleles AB, CD, & dont les bases EF, HI, sont égales entre elles, sont aussi égaux entre eux.

PREPARATION.

Prenez sur la ligne AB, la ligne GA, égale à la base EF, & joignez la droite AE, qui sera parallele au côté FG, *par Prop.* 33. Prenez sur la même ligne AB, la ligne KB égale à la base HI, & joignez la droite BI, qui sera parallele au côté HK.

DEMONSTRATION.

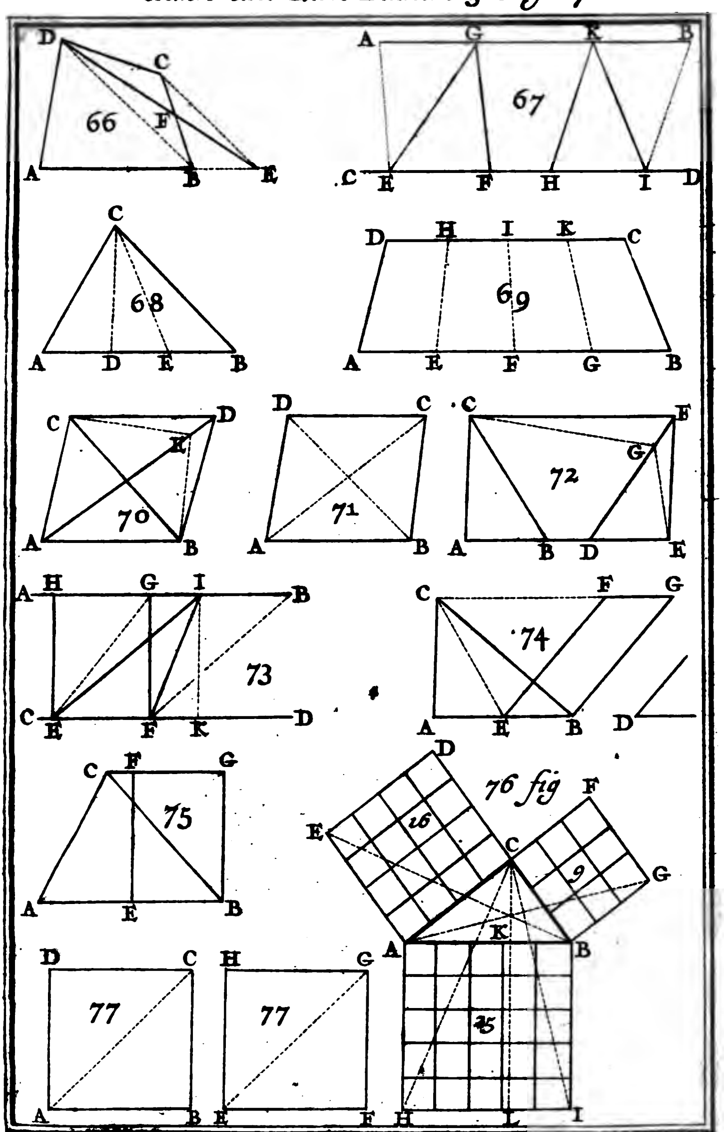
Parce que le côté EG est la diagonale du Parallelogramme EFGA, le triangle EFG sera la moitié de ce Parallelogramme *par Prop.* 34. & pareillement puisque le côté IK est la diagonale du Parallelogramme HIBK le triangle HIK sera la moitié de ce Parallelogramme : & comme les deux Parallelogrammes EFGA, HIBK sont égaux entre eux, *par Prop.* 36. il s'ensuit que leurs moitiez, c'est à dire les triangles EFG, HIK, sont aussi égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

On se sert de cette Proposition pour diviser un champ triangulaire en autant de parties égales que l'on voudra, par des lignes droites tirées de l'un de ses angles en cette sorte.

68. Fig. Pour diviser le triangle ABC, par exemple en trois parties égales, par des lignes droites tirées de l'angle C, divisez le côté AB opposé à cet angle C, en trois parties égales aux points D, E, & tirez par ces points E, D, à l'angle C, autant de lignes droites, qui diviseront le triangle proposé

ABC


66
D C F A B E
67
A G K B
C E F H I D
68
C A D E B
69
D H I K C
A E F G B
70
C D H A B
71
D C A B
72
C F G A B D E
73
A H G I B
C E F K D
74
C F G A E B D
75
C F G A E B
76 fig
D E F C G A K B H L I
16
9
25
77
D C A B
77
H G E F

ABC en trois triangles égaux, puisque leurs bases sont égales, & qu'ils ont le même point C, pour sommet; ce qui est la même chose que d'être entre mêmes paralléles. Planche 5. 68. Fig.

On peut aussi tres-facilement au moyen de cette Proposition partager un champ, qui a la figure d'un Trapezoïde: comme si l'on veut diviser le Trapezoïde ABCD, par exemple en quatre parties égales, on divisera chacun de ses deux côtez paralleles AB, CD, en quatre parties égales, & l'on joindra les points opposez de division par les droites EH, FI, GK, lesquelles diviseront le Trapezoïde proposé ABCD en quatre Trapezoïdes plus petits, qui seront égaux entre eux, parce qu'ils sont composez de triangles égaux, comme l'on connoîtra en tirant leurs diagonales, qui les diviseront en des triangles, dont les bases seront égales entre elles, &c. 69. Fig.

PROPOSITION XXXIX.

THEOREME XXIX.

Les Triangles égaux, qui ont une même base, sont entre mêmes paralleles.

JE dis que si les Triangles ABC, ABD, qui ont la même base AB, sont égaux entre eux, ils sont entre *mêmes paralleles*, c'est à dire que la ligne droite CD, qui joint leurs sommets C, D, est parallele à la base commune AB, & qu'ainsi ils sont entre les mêmes paralleles AB, CD. 70. Fig.

PREPARATION.

Tirez du point C, à la base commune AB, la parallele CE, qui rencontrera le côté AD en quelque point, comme en E, par lequel & par l'extremité B de la base commune AB, vous tirerez la droite BE, sans considerer où le point E tombe, parce que la démonstration est toûjours la même.

DEMONSTRATION.

Puisque les triangles ABC, ABE, sont entre les mêmes paralleles AB, CE; *par constr.* & qu'ils ont la base commune AB, ils seront égaux entre eux, *par Prop.* 37. & comme le triangle ABD est égal au triangle ABC, *par supp.* il s'ensuit *par Ax* 1. que

Planche 5. 70. Fig. les deux triangles ABD, ABE, sont égaux entre eux, & *par Ax.* 8. que le point E tombe sur le point D, & la ligne CE sur la ligne CD, & que par consequent la ligne CD est parallele à la base commune AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

71. Fig. Cette Proposition sert pour démontrer celle-cy; *Tout Quadrilatere qui est divisé en deux également par chacune de ses deux diagonales, est un Parallelogramme*: c'est à dire que si le Quadrilatere ABCD est divisé en deux également par la diagonale AC, & aussi en deux également par l'autre diagonale BD, en sorte que les trois triangles ABC, ABD, ACD, soient égaux entre eux, *par Ax* 7. comme étant chacun la moitié du Quadrilatere ABCD; ce Quadrilatere ABCD sera Parallelogramme.

DEMONSTRATION.

Puisque les deux triangles ABC, ABD, qui ont la même base AB, sont égaux entre eux, *par supp.* ils seront entre les mêmes paralleles, *par Prop.* 39. c'est à dire que la ligne CD sera parallele à la base commune AB. On connoîtra de la même façon, qu'à cause des deux triangles égaux ACB, ACD, qui sont sur la même base AD, la ligne BC est parallele à la base commune AD, & qu'ainsi la figure ABCD est un Parallelogramme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XL.

THEOREME XXX.

Les Triangles égaux, qui ont les bases égales sur une même ligne droite, sont entre mêmes paralleles.

72. Fig. JE dis que si les Triangles égaux ABC, DEF, ont leurs bases égales AB, DE, sur la ligne droite AE, leurs sommets C, F, sont terminez par la ligne droite CF parallele à la premiere ligne droite AE.

PREPARATION.

Tirez du point C, à la ligne droite AE, la parallele CG, qui rencontrera le côté DF, en quelque point

point, comme en G, par lequel & par l'extremité E, de la base DE, vous tirerez la droite GE, sans considerer où le point G tombe, parce que la démonstration sera toûjours la même, comme vous allez voir. Planche 5. 72. Fig.

DEMONSTRATION.

Puisque les triangles ABC, DEG, sont entre les mêmes paralleles AE, CG, *par constr.* & que leurs bases AB, DE, sont égales entre elles, *par supp.* ils seront égaux entre eux, *par Prop.* 38. & comme le triangle DEF est supposé égal au triangle ABC, il s'ensuit *par Ax.* 1. que les deux triangles DEF, DEG, sont égaux entre eux, & *par Ax.* 8. que le point G tombe sur le point F, & la ligne CG sur la ligne CF, & que par conséquent la ligne CF est parallele à la ligne AE, parce que la ligne CG a été supposée parallele à la même ligne AE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XLI.

THEOREME XXXI.

Si un Parallelogramme & un Triangle ont une même base, & sont entre mêmes paralleles, le Parallelogramme sera double du Triangle.

JE dis que si le Parallelogramme EFGH, & le Triangle EFI, ont une base commune EF, & sont entre les mêmes paralleles AB, CD, en sorte que le sommet I, du Triangle EFI, se termine precisément à la ligne AB, parallele à la base commune EF; le Parallelogramme EFGH est double du Triangle EFI. 73. Fig.

PREPARATION.

Tirez de l'extremité F de la base commune EF, la droite FB, parallele au côté EI, du Triangle EFI, pour avoir le Parallelogramme EFBI.

DEMONSTRATION.

Parce que le Parallelogramme EFGH est égal au Parallelogramme EFBI, *par Prop.* 35. & que le Parallelogramme EFBI est double du Triangle EFI,

par

Planche 5. 73. Fig. *par Prop.* 34. il s'ensuit que le Parallelogramme EFGH est aussi double du Triangle EFI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut démontrer autrement & tres-facilement cette Proposition, si au lieu de tirer la parallele FB; on tire la diagonale FG, car alors on connoîtra *par Prop.* 37. que le Triangle EFG est égal au Triangle EFI: d'où il suit que le Parallelogramme EFGH étant double du Triangle EFG, *par Prop.* 34. il est aussi double du Triangle EFI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & aussi pour démontrer la *Prop.* 47. Elle est le fondement de la Methode, dont on se sert ordinairement pour trouver l'aire d'un Triangle, qui est de multiplier la base du Triangle par sa perpendiculaire tirée de l'angle opposé, & de prendre la moitié du produit; parce qu'en multipliant la base EF du Triangle EFI par sa perpendiculaire IK: on a le contenu d'un Parallelogramme rectangle, comme seroit EFGH, qui est double du Triangle, comme nous venons de démontrer, ce qui fait qu'on en prend la moitié pour avoir l'aire du Triangle.

PROPOSITION XLII.

PROBLEME XII.

Décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & ayant un angle égal à un angle rectiligne donné.

74. Fig. POur reduire le Triangle donné ABC, en un Parallelogramme, qui ait un angle égal à l'angle donné D, divisez sa base AB en deux également au point E, *par Prop.* 10. & *par Prop.* 31. tirez par l'angle C, opposé à la base AB, la droite indefinie CG, parallele à la même base AB. Faites *par Prop.* 23. au point E, l'angle BEF égal au donné D, & *par Prop.* 31. tirez par le point B, la droite BG parallele à la ligne EF; & le Parallelogramme EBGF sera égal au Triangle proposé ABC.

Planche 5. 74. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint la droite CE, on connoîtra *par Prop.* 38. que les deux Triangles CEA, CEB, sont égaux entre eux, & que par consequent le Triangle ABC est double du Triangle CEB: & comme le Parallelogramme EFGB est aussi double du Triangle CEB, *par Prop.* 41. il s'ensuit *par Ax.* 6. que le Parallelogramme EFGB est égal au Triangle ABC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & aussi pour reduire un Triangle en un Parallelogramme rectangle, ce qui se fera si l'on tire la ligne EF perpendiculaire à la base AB. D'où l'on tire cette maniere vulgaire pour trouver l'aire d'un Triangle, comme du Triangle ABC, qui est de multiplier la moitié BE de sa base AB, par la perpendiculaire EF, qui est égale à la perpendiculaire qui tomberoit de l'angle C sur la base AB, car ainsi on a l'aire du Parallelogramme rectangle EFBG, qui a été démontré égal au Triangle ABC. 75. Fig.

Nous omettons icy les Prop. XLIII. XLIV. *parce que nous pouvons nous en passer pour la resolution de la suivante, & qu'elles ne sont pas d'un usage fort considerable dans la Geometrie.*

PROPOSITION XLV.

PROBLEME XIII.

Décrire un Parallelogramme égal à un Rectiligne donné, & ayant un angle égal à un angle rectiligne donné.

IL est évident que si *par Prop.* 37. on reduit le Rectiligne donné en Triangle, & ce Triangle en un Parallelogramme, qui ait un angle égal au donné, *par Prop.* 42. le Problême sera résolu. Planche 3. 75. Fig.

Planche 3. 77. Fig.

PROPOSITION XLVI.

PROBLEME. XIV.

Décrire un Quarré sur une ligne donnée.

POur décrire un Quarré sur la ligne donnée AB, tirez *par Prop.* 11. des deux extremitez A, B, les deux lignes AD, BC, égales & perpendiculaires chacune à la même ligne AB, & joignez la droite CD : & la Figure ABCD sera un Quarré, de sorte que ses quatre angles seront droits, & ses quatre côtez égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

Puisque les deux lignes AD, BC, sont égales chacune à la même AB, *par constr.* elles seront égales entre elles, *par Ax.* 1. & parce qu'on les a fait perpendiculaires à la même AB, elles seront paralleles entre elles, *par Prop.* 28. & *par Prop.* 33. les deux lignes AB, CD, seront égales & paralleles entre elles. Ainsi les quatre côtez de la figure ABCD, seront égaux entre eux. *Ce qui est l'une des deux choses qu'il falloit démontrer.*

Puisque la figure ABCD est un Parallelogramme, comme nous venons de reconnoître, l'angle C sera égal à son opposé A, *par Prop.* 34. & par consequent droit, & pareillement l'angle D sera égal à son opposé B, & consequemment droit. Ainsi les quatre angles de la figure ABCD, seront droits. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Ce Problême sert comme de Lemme au Theorême suivant, & il sert aussi pour la démonstration de presque toutes les Propositions du Livre second, & dans plusieurs autres rencontres.

PRO-

Planche 5. 76. Fig.

PROPOSITION XLVII.

THEOREME XXXIII.

Aux triangles rectangles, le Quarré de l'hypotenuse est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtez.

JE dis que si le Quarré ABIH décrit sur l'hypotenuse, ou sur le côté AB opposé à l'angle droit C du triangle rectangle ABC, est égal à la somme des Quarrez ACDE, BCFG, décrits sur les deux autres côtez AC, BC.

PREPARATION.

Tirez de l'angle droit C, la ligne CKL perpendiculaire à l'hypotenuse AB, & joignez les droites CH, CI, & AG, BE, car je suppose que *par Prop.* 46. on a décrit un Quarré sur chacun des trois côtez du Triangle rectangle ABC, dont l'hypotenuse AB est icy supposée de 5. pieds, le côté AC de 4, & l'autre côté de BC 3, & alors on void déja par experience que le seul Quarré de l'hypotenuse AB, a autant de pieds quarrez, sçavoir 25, que les deux autres Quarrez en contiennent ensemble, car le quarré de AC en comprend 16, & le quarré de BC en contient 9, lesquels avec 16. font bien 25. Voyons-en à present la

DEMONSTRATION.

Les deux Triangles ABG, BCI, sont égaux entre eux, *par Prop.* 4. parce qu'ils ont les deux côtez AB, BG, égaux aux deux BI, BC, & l'angle compris ABG égal à l'angle compris CBI, chacun étant composé d'un angle droit & de l'angle aigu commun ABC.

Pareillement les deux Triangles ABE, ACH, sont égaux entre eux, parce qu'ils ont les deux côtez AB, AE, égaux aux deux AH, AC, & l'angle compris CAH égal à l'angle compris BAE, chacun étant com-

Planche 5. 76. Fig. composé d'un angle droit & de l'angle aigu commun BAC.

Parce que les deux angles ACB, ACD, sont droits, & par consequent égaux ensemble à deux droits, on connoîtra *par Prop.* 14. que BCD est une ligne droite, & par la même raison, l'on connoîtra que ACF est une ligne droite, à cause des deux angles droits BCA, BCF.

Parce que le Triangle ABG, & le Parallelogramme BCFG, ont la même base BG, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles AF, BG, le Parallelogramme BCFG sera double du Triangle ABG, *par Prop.* 41. On connoîtra de la même façon que le Parallelogramme KLIB est double du Triangle BCI, parce qu'ils ont la même base BI, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles CL, BI. D'où il est aisé de conclure, que comme chacun des deux Triangles ABG, BCI, qui ont été démontrez égaux, est la moitié de son Parallelogramme, comme il a été démontré; leurs doubles, sçavoir le Quarré BCFG, & le Parallelogramme KLIB, sont égaux entre eux.

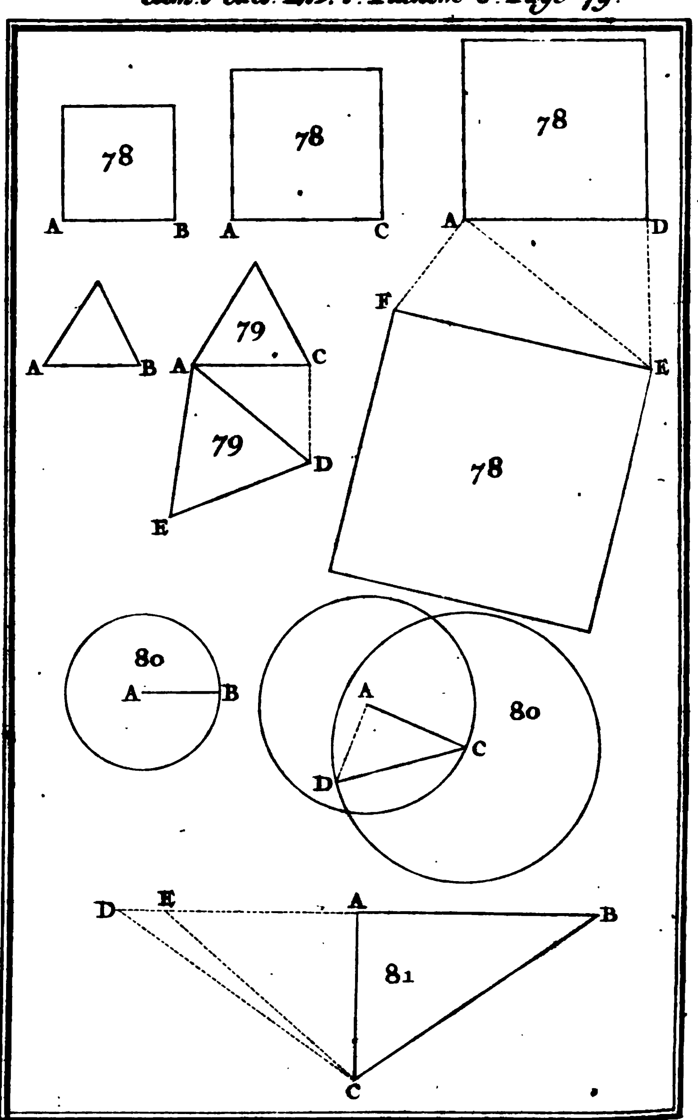
On démontrera de la même façon que le Quarré ACDE est égal au Parallelogramme AKLH, d'où il suit que la somme des deux Parallelogrammes BKLI, AKLH, c'est à dire le seul Quarré ABIH est égal à la somme des deux Quarrez BCFG, ACDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonstration suppose que la ligne CKL est parallele à chacune des deux BI, AH, ce qui est évident *par Prop.* 28. parce que chacune de ces trois lignes est *par constr.* perpendiculaire à la même ligne AB.

USAGE.

Cette Proposition sert non seulement pour la démonstration de la suivante, & de plusieurs autres des Livres suivans, mais elle sert encore comme de fondement à une grande partie des Mathematiques. Vous en verrez l'usage dans la Trigonometrie pour la construction de la Table des Sinus, des Tangentes, & des Secantes; & nous en enseignerons icy l'usage pour l'addition des Quarrez & des autres figures regulieres, dont les côtez & les angles sont égaux, & même pour l'addition des Cercles.

Pour


78
A
B
78
A
C
78
A
D
A
B
79
A
C
79
D
E
F
E
78
80
A
B
A
80
C
D
D
E
A
B
81
C

Pour trouver un Quarré égal à la somme des trois quarrez donnez AB, AC, AD, tirez au côté AD la perpendiculaire DE égale au côté AC, & joignez la droite AE, qui sera le côté d'un Quarré égal aux deux quarrez AD, DE, ou AC, à cause de l'angle droit D: c'est pourquoy si l'on tire au côté AE la perpendiculaire AF égale au dernier côté AB, & qu'on joigne la droite EF, cette ligne EF sera le côté d'un Quarré égal à la somme des trois AB, AC, AD. Planche 6. 78. Fig.

Pareillement pour trouver un Triangle équilateral égal à la somme des deux AB, AC, tirez au côté AC, la perpendiculaire CD égale à l'autre côté AB, & joignez la droite AD, qui sera le côté du triangle équilateral ADE égal aux deux proposez AB, AC, parce que les figures semblables sont entre elles comme les Quarrez de leurs côtez homologues *par* 20. 6. Voyez 31. 6. 79. Fig.

C'est de la même façon que l'on ajoûtera ensemble plusieurs cercles donnez, comme par exemple les deux, dont les demi-diametres sont AB, AC: sçavoir en tirant au rayon AC, la perpendiculaire AD égale à l'autre rayon AB, & en joignant la droite CD, qui sera le rayon d'un cercle égal aux deux proposez, AB, AC, parce que les Cercles sont comme les quarrez de leurs diametres, ou de leurs demi-diametres, *par* 2. 12. 80. Fig.

LEMME.

Si sur deux lignes égales on décrit deux Quarrez, ces deux Quarrez seront égaux entre eux.

Je dis que si les deux côtez AB, EF, sont égaux entre eux, les deux Quarrez ABCD, EFGH, sont aussi égaux entre eux. Planche 5. 77. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les deux diagonales AC, EG, elles diviseront en deux également leurs Quarrez, par Prop. 34. *tellement que le triangle ABC, sera la moitié du Quarré ABCD, & le triangle EFG la moitié du Quarré EFGH: & parce que ces deux triangles ABC, EFG, sont égaux entre eux*, par Prop. 4. *il s'ensuit que leurs doubles, c'est à dire les Quarrez ABCD, EFGH, sont aussi égaux entre eux.* Ce qu'il falloit démontrer.

Planche 6. 81. Fig.

PROPOSITION XLVIII.

THEOREME XXXIV.

Si dans un Triangle le Quarré d'un côté est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtez, l'angle opposé à ce côté est droit.

JE dis que si le Quarré du côté BC du triangle ABC, est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtez AB, AC, l'angle A opposé au premier côté BC est droit.

PREPARATION.

Tirez *par Prop.* 11. la ligne AD perpendiculaire & égale au côté AB, & joignez la droite CD.

DEMONSTRATION.

A cause de l'angle droit CAD, le Quarré du côté CD est égal au quarré des deux autres côtez AC, AD, du triangle rectangle DAC, *par Prop.* 47. & parce que le côté AB est égal au côté AD, *par constr.* le quarré de AB sera égal au quarré de AD, *par le Lemme precedent.* Ainsi le Quarré de CD sera égal à la somme des Quarrez AB, AC, & comme cette somme est égale au quarré de BC, *par supp.* il s'ensuit que le Quarré de CD est égal au Quarré de CB, & que par consequent les deux côtez CD, CB, sont égaux entre eux : c'est pourquoy *par Prop.* 8. les triangles ADC, ABC, seront égaux entre eux, & l'angle CAB sera égal à l'angle CAD, & consequemment droit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition, qui est l'inverse de la precedente, sert pour tirer une perpendiculaire par l'extremité d'une ligne donnée sur la terre, comme A, de la ligne donnée AD, en cette sorte. Prenez depuis A jusques en E, sur la ligne donnée AD, la longueur de 4. toises, & attachez au point A un cordeau long de 3. toises, & au point E un autre cordeau long de 5. toises. Il est évident *par Prop.* 48. que si l'on étend

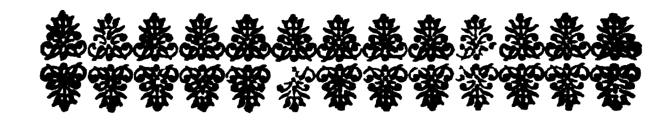
étend ces deux cordeaux, & que l'on joigne ensemble leurs extremitez, on aura le point C de la perpendiculaire AC, parce que 3, 4, 5, est en nombres un triangle rectangle. Planche 6. 81. Fig.

Au lieu de 3 toises pour AC, on en pourroit mesurer 5, & au lieu de 4 pour AE, on en pourroit prendre 12, & alors au lieu de 5, il faudroit prendre 13 pour le cordeau ou l'hypotenuse CE, parce que 5, 12, 13, est un triangle rectangle en nombres. Ainsi des autres.

Pour trouver un triangle rectangle en nombres, *le produit de deux nombres quelconques est un côté, la difference de leurs quarrez est l'autre côté, & la somme des mêmes quarrez est l'hypotenuse.*

Ainsi en se servant de ces deux nombres, 2, 3, qu'on appelle *Nombres generateurs*, le double 12 de leur produit 6 est le côté AE, la difference de leurs quarrez 4, 9, est le côté AC, & la somme 13 des mêmes quarrez 4, 9, est l'hypotenuse CE.





LIVRE II.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Euclide aprés avoir expliqué dans le Livre precedent les proprietez du Parallelogramme en général il traite dans celuy-cy particulierement des Parallelogrammes rectangles, qu'on appelle d'un seul nom *Rectangles*, en comparant ensemble les quarrez & les Rectangles qui se forment d'une ligne droite diversement coupée & de ses parties.

Quoique ce Livre paroisse difficile, neanmoins il semblera tres-facile à celuy qui examinera avec attention ses Propositions, dont on concevra presque toutes les démonstrations en regardant simplement la figure, n'étant fondées que sur ce Principe clair & évident, qui nous apprend qu'*un Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.*

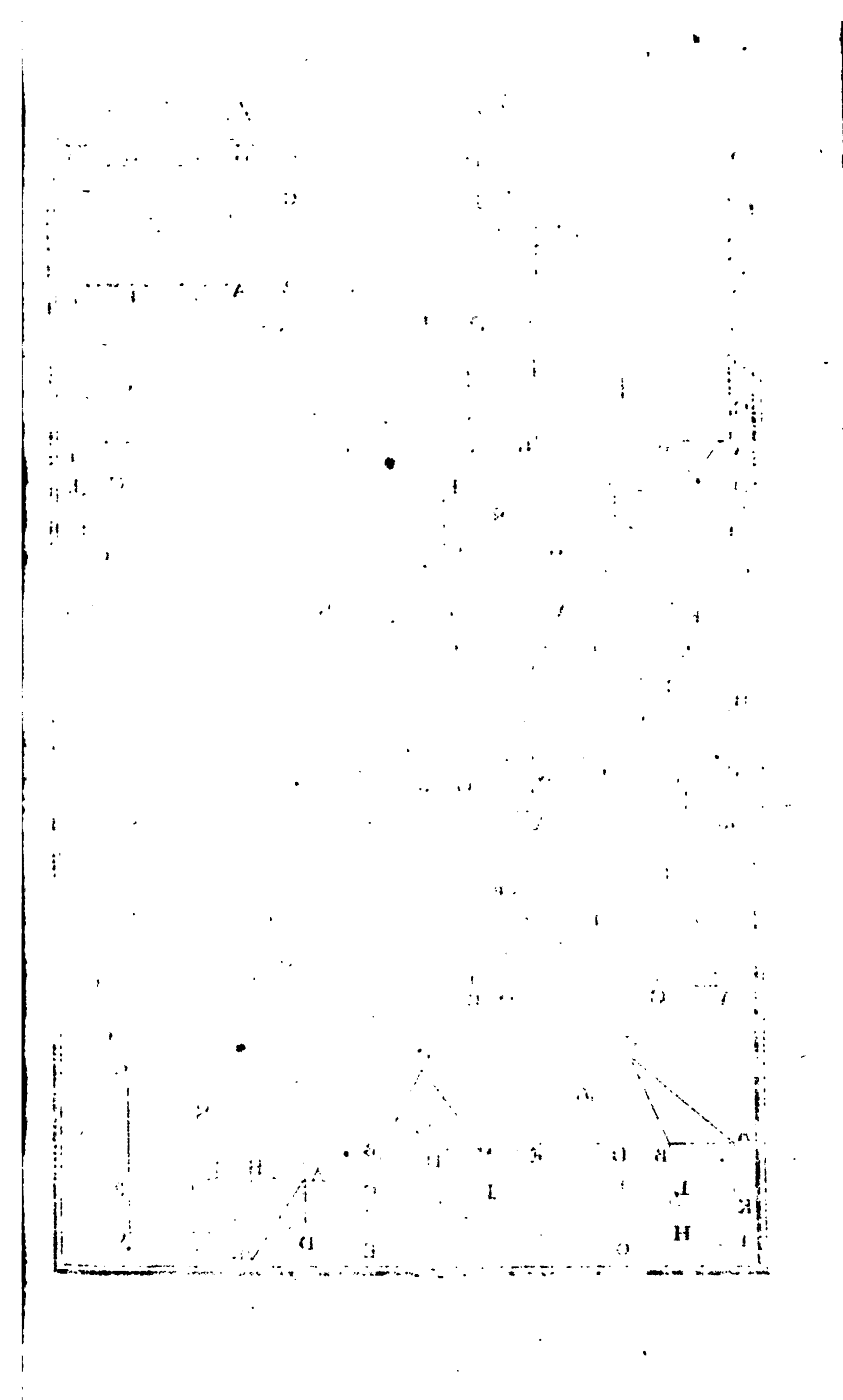
DEFINITIONS.

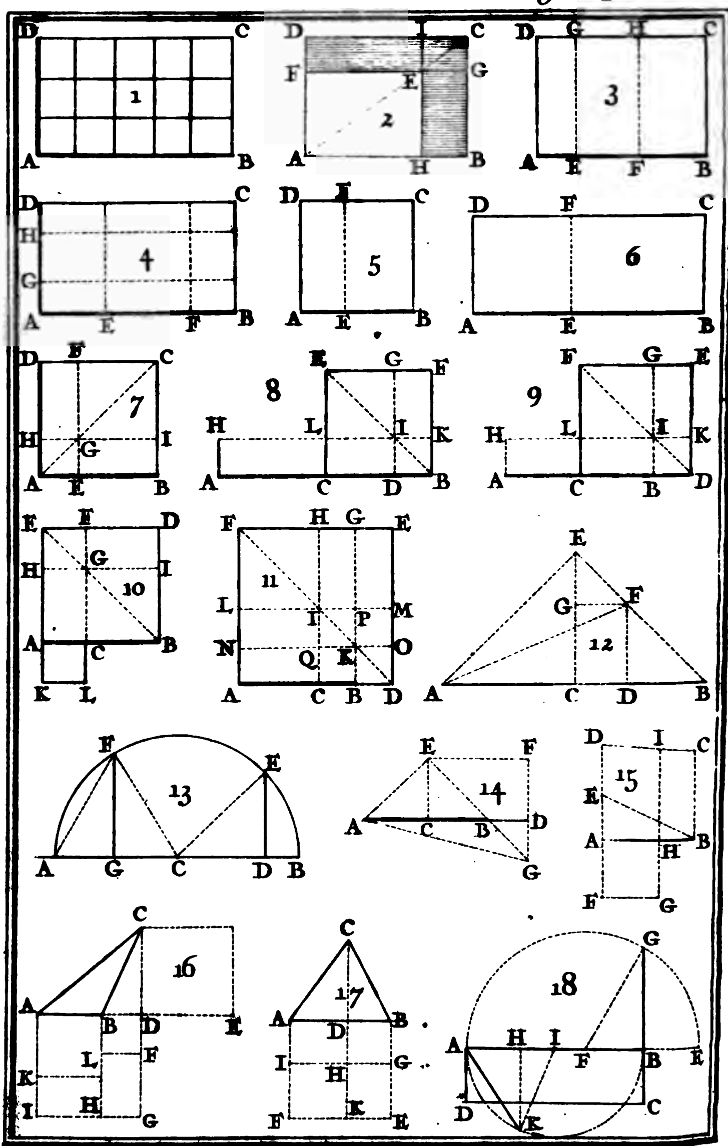
I.

1. Fig. Le *Rectangle compris sous deux lignes* est celuy où ces deux lignes, qui en representent la longueur & la largeur, forment l'angle droit. *Ainsi on connoît que le Rectangle ABCD est compris sous les deux lignes AB, AD, qui forment l'angle droit A, la ligne AB representant la longueur, & AD la largeur.*

Ce Rectangle n'est souvent que par imagination, parce qu'il suffit qu'on en donne la longueur AB, & la largeur AD pour concevoir que de cés deux lignes AB, AD, il est possible d'en former un Réctangle, qui devient un Quarré, quand ces deux lignes sont égales entre elles.

La quantité de la surface d'un Rectangle, c'est à dire l'aire d'un





1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

d'un rectangle se mesure par de petits quarrez, comme par des pieds quarrez, ou par des toises quarrées, selon que la longueur & la largeur sont exprimées en pieds courans, ou en toises courantes. 1. Fig.

La necessité de cette mesure vient de ce qu'une surface est produite par le mouvement d'une ligne, lequel produit les lignes qui composent la surface par le nombre infini des points, dont la ligne qui se meut est composée: comme le Rectangle par le mouvement d'une ligne le long d'une autre qui luy est perpendiculaire.

Comme si la largeur AD est composée par exemple de trois points, c'est à dire de trois pieds, en prenant un pied pour un point, & si cette ligne AD se meut le long de la largeur AB, que nous supposerons de cinq pieds, en conservant toûjours un angle droit; elle décrira par son mouvement continuel, des lignes droites, qui s'entrecouperont à angles droits, & feront autant de pieds quarrez que vous en voyez marquez dans la figure, sçavoir 15, que l'on peut trouver par abregé, sçavoir en multipliant la longueur par la largeur, c'est à dire 5. par trois.

Cela est cause, que l'on exprime ce Rectangle quelquefois en *nombres*, sans qu'il soit décrit effectivement, sçavoir en multipliant ensemble les nombres des mesures des deux lignes qui le forment, pour faire connoître par le produit de la multiplication, que le Rectangle que l'on conçoit fait sous ces deux lignes, a autant de semblables mesures quarrées dans sa superficie: & c'est pour cela que le nombre qui est produit par la multiplication de ces deux autres a été appellé par Euclide *Nombre plan*, dont les deux autres Nombres qui le produisent, sont appellez *côtez*.

La raison de cette multiplication est évidente, parce que si la longueur AB n'étoit que d'un pied, la ligne AD en parcourant ce pied de la ligne AB, produiroit un rang de trois pieds quarrez: mais comme la longueur AB est supposée de cinq pieds, la ligne AD en parcourant ces cinq pieds, produiroit cinq rangs de trois pieds quarrez chacun, c'est à dire cinq fois trois pieds quarrez, ou 15 pieds quarrez pour la superficie entiere du Rectangle ABCD.

Or comme l'on peut aussi faire mouvoir par pensée la longueur AB le long de la largeur AD, pour produire le même Plan ABCD, il est évident que la longueur AB en se mouvant d'un pied le long de la ligne AD, produira un rang de cinq pieds quarrez: & qu'en se mouvant de trois pieds, c'est à dire en parcourant toute la ligne AD, toûjours parallelement à elle-même, elle produira trois rangs de cinq pieds quarrez, c'est à dire trois fois cinq pieds quarrez, ou 15 pieds quarrez, comme auparavant, pour la surface ABCD. Où vous

1. Fig. voyez que *deux nombres étant multipliez reciproquement l'un par l'autre, produisent un même nombre.* Comme icy en multipliant 3 par 5, il vient le même nombre qu'en multipliant 5 par 3, sçavoir 15.

II.

2. Fig. Si par un point E, pris à discretion sur la diagonale AC du rectangle ABCD, on tire aux deux côtez AB, AD, les deux paralleles FG, HI, il se formera quatre petits Rectangles, dont les deux DE, BE, par où la diagonale ne passe pas, avec l'un des deux autres, comme avec GI, forment la figure BIF, qu'on appelle *Gnomon*, parce qu'elle ressemble à une Equierre.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

Si de deux lignes droites l'une est coupée en autant de parties que l'on voudra, le Rectangle compris sous ces deux lignes est égal aux Rectangles compris sous la ligne qui n'est pas divisée, & sous les parties de celle qui est divisée.

3. Fig. JE dis que si des deux lignes AB, AD, la premiere AB est divisée aux points E, F, le Rectangle ABCD compris sous ces deux lignes est égal à tous les Rectangles compris sous la ligne AD qui n'est pas divisée, & sous les parties AE, EF, BF, de la divisée AB. De sorte que si la ligne AD est par exemple de 10 pieds, la ligne AB de 12, & ses parties AE de 3. EF de 5. & BF de 4, le Rectangle en nombres sous ces deux lignes 12, 10, sçavoir 120, est égal au Rectangle 30 sous AD, AE, au Rectangle 50 sous AD, EF, & au Rectangle 40 sous AD, BF.

PREPARATION.

Tirez des points de division E, F, les droites EG, FH, perpendiculaires à la ligne AB, lesquelles seront paralleles entre elles & aux côtez AD, BC, comme il est évident *par* 28. 1. & *par* 30. 1. à cause des quatre angles droits A, E, F, B, & de plus elles seront égales entre elles *par* 34. 1. à cause des trois Parallelogrammes AG, EH, FC.

De-

3. Fig. 3

DEMONSTRATION.

Puisque le Rectangle AG est fait sous la ligne AD & la premiere partie AE, que le Rectangle EH est fait sous la ligne EG ou AD son égale & l'autre partie EF: que le Rectangle FC est fait sous la ligne FG ou AD son égale & la derniere partie BF; & que ces trois Rectangles AG, EH, FC, conviennent avec le Rectangle ABCD, auquel *par Ax.* 8. ils sont égaux, il s'ensuit que le Rectangle ABCD est égal à la somme de tous les Rectangles compris sous la ligne AD & chaque partie de l'autre ligne AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la pratique ordinaire de la Multiplication, pour le moins quand on multiplie un nombre composé de plusieurs figures par un autre nombre d'une seule figure. Par exemple quand on veut multiplier 312 par 3, on prendra ce nombre 3 pour la ligne AD, & le premier nombre 312 pour la ligne AB, & ses parties 300 pour AE, 10 pour EF, & 2 pour BF, lesquelles étant multipliées separément par 3, on a 900 pour le Rectangle AG, 30 pour le Rectangle EH, 6 pour le Rectangle FC, & la somme 936 de ces trois Rectangles donne le Rectangle ABCD pour le produit de la Multiplication.

Pareillement pour multiplier $a + b + c$ par d, on prendra d pour AD, & $a + b + c$ pour AB, & ses parties a pour AE, b pour EF, & c pour BF, lesquelles étant multipliées separément par d, il vient ad pour le Rectangle AG, bd pour le Rectangle EH, cd pour le Rectangle FC, & la somme $ad + bd + cd$ de ces trois Rectangles donne l'aire du Rectangle ABCD, pour le produit de la Multiplication.

On ne peut pas démontrer par cette Proposition ni par les suivantes, la pratique entiere de la Multiplication, car quand il s'agit de multiplier ensemble deux nombres composez chacun de plusieurs figures, pour démontrer la pratique ordinaire, dont on se sert pour faire cette Multiplication, il est besoin d'un Theoréme plus général que le precedent, sçavoir que *le Rectangle sous deux lignes droites coupées comme l'on voudra, est égal à tous les Rectangles faits sous les parties de l'une & les parties de l'autre.* C'est à dire que si la ligne AB est coupée aux points E, F, & la ligne AD aux 4. Fig.

*Fig. points G, H, le Rectangle ABCD sous ces deux lignes est égal à tous les Rectangles compris sous les parties de la ligne AB, & les parties de la ligne AD : comme l'on connoîtra sans peine en tirant des points de division des perpendiculaires à leurs lignes, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Le Quarré d'une ligne divisée comme l'on voudra, est égal à tous les Rectangles compris sous toute la ligne & chacune de ses parties.

QUoique cette Proposition soit un Corollaire de la precedente, neanmoins nous ne laisserons pas d'en faire une démonstration particuliere, à la maniere d'Euclide.

5. Fig. Je dis donc que si la ligne AB est divisée par exemple en deux parties au point E, son quarré ABCD, est égal à tous les Rectangles compris sous la même ligne AB, & chacune de ses parties. De sorte que si la partie AE est par Exemple de 3 pieds, & la partie EB de 5, en sorte que toute la ligne AB, ou AD soit de 8 pieds, auquel cas le Quarré ABCD sera de 64 pieds quarrez, parce que 8 multiplié par 8 fait 64, lequel nombre est égal au nombre 24 des pieds quarrez du Rectangle AF, & au nombre 40 des pieds quarrez du Rectangle EC.

PREPARATION.

Tirez du point E de division la droite EF perpendiculaire à la ligne AB, qui divisera le Quarré ABCD en deux Rectangles AF, EC, dont les côtez AD, EF, seront égaux à la ligne AB.

DEMONSTRATION.

Puisque le Rectangle AF est fait sous la premiere partie AE & la ligne AD égale à la ligne AB : que le Rectangle EC est compris sous l'autre partie EB & la ligne EF égale à la même ligne AB : & que ces deux Rectangles AF, EC, conviennent avec le quarré ABCD, il

il s'ensuit *par Ax.* 8. que le Quarré ABCD leur est égal. *Ce qu'il falloit démontrer.* 5. Fig.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 4. par une voye, qui servira de seconde démonstration à la *Prop.* 2. sçavoir par l'Analyse, en cette sorte.

Si l'on met la lettre *a* pour la partie AE, & la lettre *b* pour l'autre partie EB, en sorte que toute la ligne AB, ou AD, soit $a+b$, le Rectangle AF sera $aa+ab$, & le Rectangle EC sera $ab+bb$, & la somme de ces deux Rectangles sera $aa+2ab+bb$ pour le quarré ABCD, où vous voyez que ce quarré est égal aux deux quarrez aa, bb, des deux parties AE, EB, & au double Rectangle $2ab$ sous les mêmes parties, comme porte la *Prop.* 4.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si l'on divise comme l'on voudra une ligne en deux; le Rectangle compris sous toute la ligne & l'une de ses parties, est égal au quarré de cette partie & au Rectangle sous les deux parties.

6. Fig.

JE dis que si la ligne AB est divisée comme l'on voudra en E, le rectangle ABCD sous cette ligne AB & la partie AE, en sorte que AD, AE, soient deux lignes égales; est égal au quarré de la même partie AE, & au Rectangle sous les deux parties AE, BE.

PREPARATION.

Tirez du point E de division la droite EF perpendiculaire à la ligne AB, laquelle perpendiculaire sera égale à la partie AE, parce qu'elle est parallele & égale à la ligne AD, que l'on suppose égale à la partie AE: ce qui fait que le Rectangle AF est le quarré de la partie AE, & EC le Rectangle sous les deux parties AE, EB.

DEMONSTRATION.

Puisque le Rectangle AF est le quarré de la partie

 AE:

5. Fig. AE: que le Rectangle EC est fait sous les deux parties AE, BE, & que ces deux Rectangles AF, EC, conviennent avec le Rectangle ABCD; il s'ensuit *par Ax.* 8. que le Rectangle ABCD est égal au Quarré AF de la partie AE, & au Rectangle EC sous les parties AE, BE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut convaincre l'esprit de la verité de ce Theorême sans aucune preparation, sçavoir par l'Analyse, en mettant la lettre *a* pour la partie AE, & la lettre *b* pour l'autre partie BE, en sorte que toute la ligne AB soit $a + b$, laquelle étant multipliée par AD, ou AE, ou *a*, il vient $aa + ab$ pour le Rectangle ABCD, lequel est égal comme vous voyez, au quarré *aa* de la partie AE, & au Rectangle *ab* sous les parties AE, BE. *Ce qu'il falloit demontrer.*

USAGE.

Cette Proposition peut servir pour la démonstration de la suivante, & aussi de la *Prop.* 14. & l'on s'en sert dans plusieurs autres rencontres, pour démontrer promptement & facilement des Théorêmes plus difficiles.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Le Quarré d'une ligne divisée en deux comme l'on voudra, est égal aux quarrez de ses deux parties, & à deux Rectangles sous les mêmes parties.

6. Fig. JE dis que le Quarré ABCD de la ligne AB coupée comme l'on voudra au point E, est égal aux quarrez des parties AE, BE, & à deux Rectangles sous les mêmes parties AE, BE. De sorte que si la partie AE est par exemple de 3 pieds, & la partie BE de 6, en sorte que toute la ligne AB soit de 9 pieds, le quarré ABCD, qui sera de 81. pieds quarrez, parce que 9 multiplié par 9, fait 81, est égal au quarré 9 de la partie AE, au quarré 36 de l'autre partie BE, & à deux Rectangles sous les parties AE, BE, c'est à dire à deux fois 18, ou à 36.

PRE-

PREPARATION. 7. Fig.

Ayant tiré la diagonale AC, tirez du point E, la droite EF perpendiculaire à la ligne AB, & par le point G, où elle coupe la diagonale AC, tirez à la même ligne AB, la parallele HI, laquelle avec la premiere EF divise le Quarré ABCD, en quatre Rectangles, sçavoir AG, BG, CG, DG.

DEMONSTRATION.

A cause des deux côtez égaux BA, BC, du triangle ABC, *par constr.* les deux angles BAC, ACB, seront égaux entre eux, *par* 5. 1. & chacun sera un demi-droit, *par* 32. 1. parce qu'ensemble ils sont un droit, à cause de l'angle B, qui est droit, puisqu'il est l'angle d'un Quarré.

On connoîtra de la même façon que les deux angles DAC, DCA, du triangle isoscéle rectangle ADC, sont chacun un demi-droit. D'où il suit *par* 32. 1. qu'à cause des angles droits E, H, I, les angles AGE, AGH, CGF, CGI, sont aussi demi-droits, & par consequent égaux entre eux, & *par* 6. 1. que les deux lignes AE, GE, sont égales entre elles, aussi-bien que les deux AH, GH, & que les deux GI, CI, & encore que les deux CF, GF.

Parce que les côtez opposez d'un Parallelogramme sont égaux entre eux, *par* 34. 1. il est aisé de conclure que le Rectangle AG est le quarré de la partie AE, que le Rectangle FI est le quarré de l'autre partie BE, & que chacun des deux Rectangles BG, DG, est fait sous les mêmes parties AE, BE : & puisque ces quatre Rectangles AG, FI, BG, DG, conviennent avec le Quarré ABCD, il s'ensuit *par Ax.* 8. qu'ils luy sont égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut démontrer cette Proposition par le moyen de la precedente, sans la diagonale AC, sçavoir en faisant AH égale à la partie AE, & en tirant du point E la ligne EF perpendiculaire à la ligne AB, & du point H la

ligne

7. Fig. ligne HI perpendiculaire à la ligne AD, & en raisonnant de la sorte.

Le Rectangle AI sous la ligne AB & la partie AE, est égal au quarré AG de cette partie AE, & au Rectangle EI sous les parties AE, BE, *par Prop*. 3. & pareillement le Rectangle DI, sous la même ligne AB, & l'autre partie BE, est égal au quarré EI de cette partie BE, & au Rectangle DG sous les parties AE, BE : mais les deux rectangles AI, DI, sont ensemble égaux au Quarré ABCD, comme vous voyez : donc les quarrez des deux parties AE, BE avec le double Rectangle sous les mêmes parties AE,BE, sont aussi ensemble égaux au Quarré ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer*.

L'Analyse découvre & démontre aussi en même temps la verité de ce Theorême, car si l'on met la lettre a pour la partie AE, & la lettre b pour l'autre partie BE, en sorte que la ligne AB soit $a+b$: en multipliant $a+b$ par luy-même, c'est à dire par $a+b$, on a $aa+2ab+bb$ pour l'aire du Quarré ABCD, où vous voyez que cette aire est égale aux quarrez aa, bb., des deux parties AE, BE, & au double Rectangle $2ab$ sous les mêmes parties AE, BE. *Ce qu'il falloit démontrer*.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des suivantes, & principalement pour la démonstration de la *Prop*. 12. Elle est le fondement de la Methode, dont on se sert ordinairement pour trouver la Racine quarrée d'un nombre composé de plus de deux figures. Comme si ce nombre est 529, on considere ce nombre 529 comme l'aire du Quarré ABCD, dont on cherche le côté du quarré en nombres, qui est ce qu'on appelle *Racine quarrée*, laquelle doit avoir dans cet exemple deux figures, qui sont representées par les parties AE, BE.

Quand on prend la Racine quarrée de 5, qui vaut autant que 500, on a 2, ou 20, pour la plus grande partie BE, dont le quarré 4, ou 400, qui est representé par le quarré FI, étant ôté de 529, qui represente le Quarré ABCD, il reste 129 pour le Gnomon FAI qui comprend les deux Rectangles égaux FH, BG, & le quarré AG de la partie AE, qui represente la seconde figure de la Racine qu'on cherche.

Pour trouver cette seconde figure, on conçoit que ces deux Rectangles égaux FH, BG, sont mis en ligne droite, afin qu'ensemble ils fassent un seul Rectangle, dont la base sera 4, ou 40, sçavoir le double de la premiere figure trouvée: & parce que ce seul Rectangle avec le quarré AG fait un Rectangle total, qui vaut 129, si l'on divise 129 par ce double 40, il vient 3 au quotient pour la seconde figure de la Racine qu'on

qu'on cherche, laquelle par consequent vaudra 20+3, ou 23 : & quand on a multiplié le diviseur 40 par 3, pour ôter le produit 120, qui est la somme des deux Rectangles égaux DG, BG, il reste encore 9 pour le quarré AG, ce qui fait que du reste 9 on doit ôter encore le quarré 9 de la seconde figure trouvée 3. 7. Fig.

Le Quarré indeterminé $aa+2ab+bb$, dont la Racine quarrée est $a+b$ suffit pour trouver la racine quarrée d'un nombre, comme du même nombre 529 : car lorsque de ce nombre 529 on ôte le quarré 400 de la premiere figure trouvée 20, que la lettre a represente, c'est comme si de $aa+2ab+bb$ on avoit ôté le quarré aa, & alors le reste 129 sera representé par le reste $2ab+bb$, qui fait connoître que pour avoir la seconde figure, que la lettre b represente, il faut diviser le reste par le double de la premiere, à cause de $2ab$, &c.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que la diagonale d'un Quarré divise chacun des deux angles opposez en deux également ; & que les Rectangles par où elle passe, comme EH, FI, sont des quarrez.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi que de deux nombres quelconques, la somme de leurs quarrez avec le double de leur produit fait un nombre quarré, sçavoir le quarré de la somme de ces deux nombres.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une ligne droite est coupée également & inégalement, le Rectangle compris sous les parties inégales, avec le quarré de la partie entre les deux points de section, est égal au quarré de la moitié de la ligne.

JE dis que si l'on coupe la ligne AB en deux également au point C, & en deux inégalement au point D, en sorte que les parties inégales soient AD, DB, le Rectangle compris sous ces deux parties inégales AD, BD, avec le quarré de la partie CD 8. Fig.

termi-

8. Fig. terminée par les deux points de section C, D, est égal au quarré BCEF de la moitié BC de la ligne AB.

C'est à dire que si la ligne AB est par exemple de 12 pieds, & sa moitié AC ou BC par consequent de 6: la partie interceptée CD de 4, & par consequent la grande partie inégale AD de 10, & la petite BD de 2; le Rectangle 20 de ces deux parties inégales 10, 2, avec le quarré 16 de la partie interceptée 4, est égal au quarré 36 de la moitié 6 de la ligne AB.

PREPARATION.

Ayant tiré la diagonale BE, tirez du point D, la ligne DG perpendiculaire à la ligne AB, & par le point I, où elle coupe la diagonale BE, tirez la ligne KL perpendiculaire à la ligne DG, & ces deux perpendiculaires DG, KL, diviseront le quarré BCEF en quatre Rectangles, dont les deux CI, FI seront égaux entre eux, *par Prop.* 4. & les deux autres DK, LG, seront des quarrez, *par la même.* Elevez encore du point A sur AB, la perpendiculaire AH, qui rencontrant la ligne KL prolongée au point H, sera *par* 34. 1. égale à la ligne BK, ou à la partie inégale BD, ce qui fait que le Rectangle AI est compris sous les parties inégales AD, BD.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux Rectangles AL, CK, sont compris sous des lignes égales, ils seront égaux entre eux, aussi-bien que les deux CI, FI, lesquels étant ajoûtez aux deux precedens, chacun à chacun, font connoître que le Rectangle AI sous les parties inégales AD, BD, est égal au Gnomon FDL: & parce que ce Gnomon FDL, avec le quarré GL, de la partie interceptée CD, est égal au quarré BCEF, il s'ensuit que le Rectangle sous les parties inégales AD, BD, avec le quarré GL de la partie interceptée CD, est aussi égal au quarré BCEF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

8. Fig.

On peut se passer du Quarré BCEF, & se contenter du Rectangle AK compris sous la ligne AB, & sa petite partie inégale BD, égale à BK, ou AH, & des deux perpendiculaires CL, DI, pour faire la démonstration.

Parce que le quarré de la ligne BC est égal, *par Prop.* 4. aux quarrez des lignes CD, BD, & à deux Rectangles sous les mêmes lignes CD, BD, c'est à dire au double Rectangle CI, & qu'à la place d'un Rectangle CI, & du quarré de la ligne BD, c'est à dire du Quarré DK, on peut mettre le seul Rectangle CK, ou CH son égal; on connoît que le Quarré de la ligne BC est égal au quarré de la ligne CD, & aux deux Rectangles CH, CI, c'est à dire au seul Rectangle AI, sous les parties inégales AD, CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On peut aussi faire la démonstration tres facilement par l'Analyse, en cette sorte.

Si l'on met la lettre *a* pour la moitié AC, ou BC, & la lettre *b* pour la partie interceptée CD, on aura $a+b$ pour la plus grande partie inégale AD, & $a-b$ pour la plus petite BD: & si l'on multiplie ensemble ces deux parties AD, BD, ou $a+b$, $a-b$, on aura $aa-bb$ pour le Rectangle sous les mêmes parties AD, BD, auquel ajoûtant le quarré bb de la partie interceptée CD, on aura aa pour la somme du Rectangle sous les parties inégales AD, BD, & du quarré de la partie interceptée CD, laquelle somme comme vous voyez, est bien égale au Quarré de la moitié BC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer la *Prop.* 14. & aussi la *Prop.* 35. 3. & pour démontrer les principales proprietez de l'Ellipse, comme l'on peut voir dans le Traité que nous avons autrefois publié des *Lignes du premier genre.*

Elle est le fondement de toutes les Equations quarrées, ou de deux dimensions, & de la methode dont on se sert ordinairement pour trouver la Racine quarrée d'un Binome, où l'un des termes est un nombre rationnel, & le quarré de l'autre aussi un nombre rationnel.

Cette Proposition sert aussi pour démontrer, que *le produit sous la somme & la difference de deux nombres inégaux est égal à la difference de leurs quarrez*: étant évident que AD est la somme, & BD la difference de deux nombres exprimez par les lignes AC, CD, & que l'excés du quarré CF du plus grand nombre BC, ou AC, sur le quarré GL du plus petit

8. Fig. petit nombre CD, sçavoir le Gnomon FDL, est égal au Rectangle sous la somme AD, & la difference BD, de ces deux mêmes nombres AC, CD; outre que ce Rectangle a été trouvé en lettres *aa—bb*, sçavoir la difference des quarrez des nombres AC, CD, parce qu'on a supposé la lettre *a* pour AC, & la lettre *b* pour CD.

COROLLAIRE.

D'où il suit que *la difference de deux quarrez est divisible par la somme ou par la difference de leurs côtez* : ce qui sert pour trouver par le calcul les Racines des Equations de deux dimensions, comme nous avons enseigné sur la fin de nôtre *Traité des Lignes du premier genre.*

Il s'ensuit aussi que *si au produit de deux nombres inégaux on ajoûte le quarré de la moitié de leur difference, il vient un nombre quarré* : sçavoir le quarré de la moitié de leur somme : étant certain que comme AC, ou BC, est la moitié de la somme des deux grandeurs AD, DB, aussi CD est la moitié de leur difference, parce que comme la plus grande AC surpasse la moitié AC, de CD, aussi la plus petite BD est surpassée par la même moitié AC, ou BC, de la même quantité CD.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si l'on ajoûte une ligne droite à une autre divisée en deux également, le Rectangle compris sous toute la ligne & sous l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié de la ligne divisée, est égal au quarré d'une ligne composée de l'ajoûtée & de la moitié de la divisée.

9. Fig. JE dis que si à la ligne AB qui est divisée en deux également au point C, on luy ajoûte la ligne BD de telle grandeur que l'on voudra, le Rectangle sous toute la ligne AD & sous l'ajoûtée BD, avec le quarré de la moitié AC, ou BC, est égal au quarré CDEF de la ligne CD composée de la moitié BC, & de l'ajoûtée BD.

C'est à dire que si la ligne AB est par exemple de 10 pieds, & l'ajoûtée BD de 2, & par consequent la moitié AC ou BC de 5 la composée CD de 7, & la toute AD de 12; le Rectangle 24 sous la ligne AD

AD & la ligne BD, avec le quarré 25 de la moitié BC, est égal au quarré 49 de la ligne CD, qui est de 7. pieds. 9. Fig.

PREPARATION.

Ayant tiré la Diagonale DF, élevez du point B, la ligne BG perpendiculaire à la ligne AD, & par le point I, où elle coupe la diagonale DF, tirez la ligne KL perpendiculaire à la ligne BG, & ces deux perpendiculaires BG, KL, diviseront le Quarré CDEF en quatre Rectangles CI, DI, EI, FI, dont les deux DI, FI, sont des quarrez *par Prop.* 4. & les deux autres CI, EI, sont égaux entre eux, *par la même.* Tirez encore du point A, sur AB, la perpendiculaire AH, qui rencontrera la ligne KL prolongée au point H, & fera le Rectangle AL égal au Rectangle CI, & par consequent au Rectangle EI, puisque ces Rectangles ont même longueur & même largeur.

DEMONSTRATION.

Si à chacun des deux Rectangles égaux AL, EI, on ajoûte le Rectangle commun CK, on aura le Rectangle AK égal au Gnomon EBL, & si à chacune de ces deux grandeurs égales on ajoûte le quarré commun GL, on connoîtra que le Rectangle AK, avec le quarré GL, c'est à dire le Rectangle sous les lignes AD, BD, avec le quarré de la moitié BC, est égal au quarré CDEF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut aussi démontrer cette Proposition tres-facilement par l'Analyse nouvelle, en mettant la lettre a pour la moitié AC, ou BC, & la lettre b pour la ligne ajoûtée BD, & alors on aura $2a$ pour la ligne AB, $a+b$ pour la ligne CD, & $2a+b$ pour la ligne AD, & le Rectangle sous AD, & BD sera $2ab+bb$, auquel ajoûtant le quarré aa de la moitié BC, on aura $aa+2ab+bb$ pour la somme du Rectangle sous les lignes AD, BD, & du quarré de la moitié BC, laquelle somme $aa+2ab+bb$ est bien comme vous voyez, égale au quarré de la ligne GD, qui vaut $a+b$, parce que multipliant

$a+b$

9. Fig. $a+b$ par $a+b$ il vient $aa+2ab+bb$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Usage.

Cette Proposition sert pour démontrer la *Prop.* 11. & aussi la *Prop.* 36. 3. & pour démontrer les principales proprietez de l'Hyperbole, comme l'on peut voir dans le *Traité des Lignes du premier genre*, que nous avons publié autrefois. Elle sert aussi pour resoudre les Equations de deux dimensions; & dans plusieurs autres rencontres.

Corollaire.

Il suit aussi de cette Proposition, que *si au produit de deux nombres inégaux, on ajoûte le quarré de la moitié de leur difference, la somme sera un nombre quarré*, sçavoir le quarré de la moitié de la somme de ces deux nombres: étant certain que comme AC ou BC est la moitié de la difference des deux grandeurs AD, BD, qui representent les deux nombres, aussi CD est la moitié de leur somme, comme l'on connoîtra en ajoûtant au grand nombre AD, le petit BD en ligne droite vers A, pour avoir leur somme, dont CD sera la moitié.

PROPOSITION VII.

Theoreme VII.

Le Quarré d'une ligne divisée en deux comme l'on voudra, avec celuy de l'une de ses deux parties, sont ensemble égaux à deux Rectangles sous cette ligne, & la même partie, & au quarré de l'autre partie.

10. Fig. Je dis que le quarré ABDE de la ligne AB coupée comme l'on voudra au point C, avec le Quarré ACLK de sa partie AC, sont ensemble égaux à deux Rectangles compris sous la ligne AB, & la même partie AC, & au Quarré de l'autre partie BC.

C'est à dire que si la ligne AB est par exemple de 12 pieds, sa partie AC de 5, & l'autre partie BC par consequent de 7, le Quarré 144. de la ligne AB, avec le quarré 25. de la partie AC, fait la somme 169 égale à 120, qui est le double Rectangle sous la ligne AB, & la même partie AC, & au quarré 49 de l'autre partie BC.

PRE-

PREPARATION.

Ayant tiré la diagonale BE, prolongez la ligne CL jusques en F, & par le point G, où la ligne CF coupe la diagonale BE, tirez la ligne HI perpendiculaire à la ligne CF, & ces deux perpendiculaires CF, HI, diviseront le Quarré ABDE en quatre Rectangles, dont les deux CI, FH, sont deux Quarrez, & les deux autres AG, DG, sont égaux entre eux, *par Prop.* 4.

DEMONSTRATION.

Si aux deux Rectangles égaux AG, DG, on ajoûte les deux quarrez égaux AL, FH, on aura les deux Rectangles égaux GK, DH, dont chacun est compris sous la ligne AB, & sa partie AC; ce qui fait que la somme de ces deux Rectangles égaux, c'est à dire la figure DHL est égale à deux Rectangles sous la ligne AB, & sa partie AC; c'est pourquoy si à chacune de ces deux grandeurs égales on ajoûte le quarré CI, on connoîtra que la figure DHL avec le quarré CI, c'est à dire le quarré AD de la ligne AB avec le quarré AL de sa partie AC, sont ensemble égaux à deux Rectangles sous la ligne AB & la même partie AC, & au quarré de l'autre partie BC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut démontrer ce Theorême par l'Analyse nouvelle, en mettant la lettre *a* pour la partie AC, & la lettre *b* pour l'autre partie BC, & alors on aura $a+b$ pour la ligne AB, & $aa+ab$ pour le Rectangle sous la ligne AB & sa partie AC, & le double de ce Rectangle sera $2aa+2ab$, auquel ajoûtant le quarré bb de l'autre partie BC, on aura $2aa+2ab+bb$, pour la somme des deux Rectangles sous la ligne AB & sa partie AC, & du quarré de l'autre partie BC, laquelle somme $2aa+2ab+bb$ est bien égale à la somme du quarré $aa+2ab+bb$ de la ligne AB, & du quarré aa de la premiere partie AC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

10. Fig.

Usage.

Cette Proposition ne paroît pas être d'un grand usage dans les Mathematiques, & il semble qu'Euclide ne l'aicy mise, que pour servir de Lemme à la *Prop.* 13.

PROPOSITION VIII.

Theoreme VIII.

Si l'on propose une ligne coupée en un point comme l'on voudra, & qu'on luy ajoûte une de ses parties; le quarré de toute la ligne est égal à quatre Rectangles sous la ligne proposée & sous cette partie, & au quarré de l'autre partie.

11. Fig. JE dis que si la ligne AB est coupée en C, comme l'on voudra, & qu'on luy ajoûte la ligne BD égale à la partie BC; le Quarré ADEF de la toute AD, est égal à quatre Rectangles sous la ligne AB & sa partie BC ou BD, & au quarré de l'autre partie AC.

C'est à dire que si la ligne AB est par exemple de 7. pieds, sa partie AC de 5, & l'autre partie BC, ou BD, par consequent de 2, & la toute AD de 9; le Quarré 81 de cette ligne AD, est égal au quadruple du Rectangle 14 sous la ligne AB & la partie BC, ou BD, sçavoir à 56, & au quarré 25 de l'autre partie AC.

Preparation.

Ayant tiré la diagonale DF, élevez des deux points B, C, les lignes BG, CH perpendiculaires à la ligne AB, & par les points I, K, où elles coupent la diagonale DF, tirez les lignes LM, NO, paralleles à la ligne AB; & le Quarré ADEF se trouvera divisé en plusieurs Rectangles, entre lesquels, les six LH, NG, PQ, PO, BQ, BO, seront

feront des quarrez, dont les quatre derniers PQ, PO, BQ, BO, feront égaux entre eux, parce que leurs côtez sont égaux chacun à la ligne BC, ou BD.

DEMONSTRATION.

Les Rectangles AK, NP, EK, sont égaux entre eux, parce qu'ils ont une même longueur égale à la ligne AB, & une même largeur égale à la partie BC, ou BD : & le Rectangle GI avec le petit quarré BO, font encore ensemble un Rectangle égal à l'un des trois precedens, parce qu'ils valent autant que le seul Rectangle GQ, à cause du quarré PO, égal au quarré BO. Ainsi on trouve précisément dans le quarré ADEF, quatre Rectangles sous la ligne AB & sa partie BC ou BD, & de plus le quarré LH de l'autre partie AC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Pour démontrer cette Proposition par l'Analyse nouvelle, mettez comme à l'ordinaire, la lettre a pour la partie AC, & la lettre b pour l'autre partie BC, ou BD, & alors vous aurez $a+b$ pour la ligne AB, $2b$ pour la ligne CD, & $a+2b$ pour toute la ligne AD, dont le quarré $aa+4ab+4bb$ est composé du quadruple $4ab+4bb$ du Rectangle $ab+bb$ de la ligne AB & de la partie BC ou BD, & du quarré aa de l'autre partie AC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour faire plusieurs démonstrations dans la Geometrie & je m'en suis servi trés-utilement dans mon *Traité des lignes du premier genre*, pour démontrer que le Foyer de la Parabole est éloigné du sommet de la Parabole, d'une quantité égale à la quatriéme partie du Parametre.

COROLLAIRE I.

Il suit de cette Proposition, *que si au quadruple du produit de deux nombres quelconques, on ajoûte le quarré de*

11. Fig. *leur difference, la somme sera un nombre quarré*; sçavoir le quarré de la somme de ces deux nombres, étant certain que la ligne AD est la somme des deux nombres representez par les lignes AB, BD, & que AC est leur difference, à cause de BC égale à BD.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi qu'*un Quarré est quadruple d'un autre quarré, lorsque son côté est double du côté de cet autre quarré* : étant évident que le quarré CM, dont le côté CD est double du côté BD, du petit quarré BO, est quadruple de ce quarré BO, parce qu'il en comprend quatre égaux.

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Si l'on coupe une ligne également & inégalement, les quarrez des parties inégales, seront ensemble doubles de la somme du quarré de la moitié de la ligne divisée, & du quarré de la partie terminée par les deux points de section.

12. Fig. JE dis que si la ligne AB est divisée également au point C, & inégalement au point D, en sorte que les deux parties inégales soient AD, BD; les quarrez de ces deux parties inégales AD, BD, sont ensemble doubles des quarrez pris ensemble des lignes AC, CD. C'est à dire que si la ligne AB est par exemple de 10 pieds, la partie interceptée CD de 2, & par consequent la moitié AC ou BC de 5. la plus grande partie inégale AD de 7; & la plus petite BD de 3; la somme 58 des quarrez 49, 9, des parties inégales AD, BD est double de la somme 29. des quarrez 25, 4, des lignes AC, CD.

PREPARATION.

Elevez du point de milieu C, la droite CE perpendiculaire à la ligne AB, & également à sa moitié AC, ou BC, & joignez les droites AE, BE. Tirez du point D la ligne DF parallele à la ligne CE, & du point F la droite FG parallele à la ligne CD, pour avoir

avoir le Parallelogramme CDFG, dont les deux côtez opposez CD, FG, seront égaux entre eux, *par* 34. 1. Enfin joignez la droite AF.

DEMONSTRATION.

On connoîtra comme dans la *Prop.* 4. que chacun des angles aigus des deux triangles isoscéles rectangles ECA, ECB, est demi-droit, & que par consequent tout l'angle AEB est droit. On connoîtra aussi *par* 29. 1. & *par* 32. 1. que les deux angles aigus de chacun des deux triangles rectangles EGF, FDB, est demi-droit, & que *par* 6. 1. ces deux triangles sont isoscéles, c'est à dire que la ligne EG est égale à la ligne GF, ou CD son égale, & la ligne DF à la ligne DB.

Parce que *par* 47. 1. le quarré de la ligne AE est égal à la somme des quarrez des deux lignes AC, CE, qui sont égales entre elles *par constr.* il s'ensuit que le quarré de la ligne AE est double du quarré AC, c'est à dire du quarré de la ligne AC, c'est ainsi que nous parlerons dans la suite. On connoîtra de la même façon que le quarré EF est double du quarré GF, ou CD. D'où il suit que la somme des quarrez AE, EF, ou *par* 47. 1. le seul quarré AF, ou bien encore la somme des deux AD, DF, ou des deux AD, DB, est double de la somme des deux AC, CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Pour démontrer ce Theorême par l'Analyse nouvelle, mettez la lettre a pour la moitié AC, ou BC, & la lettre b pour la partie interceptée CD, laquelle étant ajoûtée & ôtée de la moitié AC ou BC, on aura $a+b$ pour la plus grande partie AD, dont le quarré est $aa+2ab+bb$, & $a-b$ pour la plus petite partie BD, dont le quarré $aa-2ab+bb$ étant ajoûté au quarré precédent $aa+2ab+bb$, de la plus grande partie AD, on aura $2aa+2bb$ pour la somme des deux quarrez AD, BD, laquelle est double comme vous voyez de la somme $aa+bb$ du quarré aa de la moitié AC, & du quarré bb de la partie interceptée CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer, que *les quarrez du Sinus verse d'un angle de 45. degrez, du Sinus verse d'un angle qui soit le reste du precedent au demi cercle, c'est à dire de 135 degrez, sont ensemble triples du quarré du Rayon.* C'est à dire que si du demi-cercle ABE, dont le centre est C, & le diametre est AB, l'arc EB est de 45 degrez, & que du point E on tire la droite ED perpendiculaire au diametre AB; les quarrez des lignes AD, BD, qui sont les Sinus verses des arcs AE, BE, ou des angles ACE, BCE, sont ensemble triples du quarré du Rayon AC.

DEMONSTRATION.

Puisque l'angle ECD du triangle rectangle CDE, est demi-droit, *par supp.* l'angle CED sera aussi demi-droit, *par* 32. 1. & *par* 6. 1. les lignes CD, DE seront égales entre elles, & le quarré du Rayon CE, ou AC, étant *par* 47. 1. égal aux quarrez des deux lignes égales CD, DE, sera double du quarré de chacune. Ainsi à la place du double du quarré de CD, on pourra prendre le quarré du Rayon AC.

Parce que par *Prop.* 9. les quarrez des lignes AD, BD, sont ensemble doubles du quarré du Rayon AC, & du quarré de la partie interceptée CD, si à la place du double du quarré de cette partie interceptée CD, on prend le quarré du Rayon AC, qui luy a été démontré égal, on connoîtra que les quarrez des lignes AD, BD sont ensemble triples du quarré AC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION X.

THEOREME X.

Si l'on ajoûte une ligne droite à une autre divisée également, le quarré de la ligne composée des deux, avec le quarré de l'ajoûtée, sont ensemble doubles du quarré de la moitié de la ligne divisée, & du quarré de la ligne composée de cette moitié & de l'ajoûtée.

24. Fig. JE dis que si l'on ajoûte la ligne BD à la ligne AB divisée en deux également au point C, le quarré de toute la ligne AD, avec le quarré de l'ajoûtée BD, sont ensemble doubles du quarré de la moitié AC ou BC, & du quarré de la ligne CD composée de la moitié BC, & de l'ajoûtée BD.

C'est

C'est à dire que si la ligne AB est par exemple de 10 pieds, & l'ajoûtée BD de 3, auquel cas la moitié AC ou BC sera de 5, la ligne CD de 8, & la toute AD de 13; la somme 178 du quarré 169 de la toute AD, & du quarré 9 de l'ajoûtée BD, sera double de la somme du quarré 25 de la moitié AC ou BC, & du quarré 64 de la ligne CD composée de la moitié BC, & de l'ajoûtée BD. 14. Fig.

PREPARATION.

Elevez du point C la ligne CE perpendiculaire à la ligne AB, & égale à la moitié AC ou BC, & joignez les droites AE, BE. Tirez du point D la ligne DF parallele à la ligne CE, & du point E la ligne EF parallele à la ligne CD, pour avoir le Parallelogramme CEFD, dont les deux côtez opposez CD, EF, seront égaux entre eux, *par* 34. 1. Enfin prolongez les deux lignes BE, DF, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point G, & joignez la droite AG.

DEMONSTRATION.

On connoîtra comme dans la *Prop.* 9. que l'angle AEG est droit, & il ne sera pas mal-aisé de connoître que les deux triangles rectangles, BDG, EFG, sont isoscéles, c'est à dire que la ligne DG est égale à la ligne BD, & la ligne FG égale à la ligne EF, & par consequent à la ligne CD.

On connoîtra aussi comme dans la *Prop.* 9. que le quarré AE est double du quarré AC, & le quarré EG double du quarré EF, ou CD. D'où il suit que la somme des deux quarrez AE, EG, ou *par* 47. 1. le seul quarré AG, ou la somme des deux AD, DG, ou des deux AD, BD, est double de la somme des deux AC, CD, *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Pour démontrer cette Proposition par l'Analyse nouvelle, mettez la lettre *a* pour la moitié AC, ou BC, & la lettre *b* pour l'ajoûtée BD : auquel cas on aura $2a$ pour AB,

11. Fig. $a+b$ pour CD, & $2a+b$ pour toute la ligne AD dont le quarré $4aa+4ab+bb$ étant ajoûté au quarré bb de la ligne ajoûtée BD, la somme $4aa+4ab+2bb$ est comme vous voyez, double de la somme $2aa+2ab+bb$ du quarré aa de la moitié AC, & du quarré $aa+2ab+bb$ de la ligne CD, composée de la moitié & de l'ajoûtée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition, pour démontrer que *la somme des Quarrez du Sinus verse d'un angle de 60 degrez, & du Sinus verse d'un angle, qui soit le reste du precedent au demi-cercle, c'est à dire de 120 degrez, est au quarré du Rayon, comme 5 à 2.* C'est à dire que si du demi-cercle ABEF, dont le
12. Fig. centre est C, & le diametre est AB, l'arc AF est de 60 degrez, & que du point F l'on tire la droite FG perpendiculaire au diamettre AB; la somme des quarrez des lignes AG, BG, qui sont les Sinus verses des arcs AF, BF, ou des angles ACF, BCF, est au quarré du Rayon BC, comme 5 à 2, ou le quarré du Rayon BC à la somme des quarrez des Sinus verses AG, BG, comme 2 à 5.

DEMONSTRATION.

Parce que le point C est le centre du demi-cercle ABE, les deux côtez CA, CF, du triangle ACF sont égaux entre eux, & les angles CAF, AFC, seront pareillement égaux entre eux, *par* 5. 1. & parce que l'angle ACF est de 60 degrez, *par supp.* les deux autres CAF, AFC seront ensemble de 120 degrez, *par* 32. 1. & chacun sera par consequent de 60 degrez, parce que la moitié de 120 est 60. Ainsi les trois angles du triangle AFC, seront égaux entre eux, d'où il suit *par Prop.* 6. que ce triangle est équilateral, & que par consequent la perpendiculaire FG divise la base AC en deux également parce que les deux triangles rectangles AGF, CGF, sont égaux entre eux, *par* 26. 1.

Parce que la ligne AC est divisée en deux également au point G, & que la ligne BC luy est ajoûtée, il s'ensuit *par Prop.* 10. que la somme des quarrez de la toute AB & de l'ajoûtée BC, est double de la somme des quarrez AG, BG: & comme la ligne AB est double de la ligne BC, le quarré AB sera quadruple du quarré BC, par *Coroll. Prop.* 8. & la somme des mêmes quarrez AB, BC, sera par consequent quintuple du quarré BC. D'où il est aisé de conclure que le quintuple du quarré du Rayon BC est double de la somme des quarrez des

Sinus verses AG, BG, & que par consequent le quarré du rayon BC est à la somme des quarrez des Sinus verses AG, BG, comme 2 est à 5. *Ce qu'il falloit démontrer.* 13. Fig.

PROPOSITION XI.

PROBLEME I.

Couper une ligne droite donnée en deux parties telles, que le Rectangle sous la toute & l'une de ses parties, soit égal au quarré de l'autre partie.

POur diviser la ligne donnée AB, au point H par exemple, en sorte que le Rectangle sous la ligne AB & sa partie BH, soit égal au quarré de l'autre partie AH; décrivez par *Prop.* 46. 1. sur la ligne AB, le quarré ABCD, & ayant divisé le côté AD en deux également au point E, portez la longueur de la ligne EB sur la ligne AD prolongée, depuis E en F, pour décrire sur la ligne AF le quarré AFGH, qui donnera le point H qu'on cherche, de sorte que si l'on prolonge la ligne GH en I, le Rectangle BI sera égal au quarré AG. 15. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne AD est divisée en deux également au point E, *par constr.* & que la ligne AF luy est ajoûtée, on connoît par *Prop.* 7. que le Rectangle sous la toute DF, & l'ajoûtée AF, c'est à dire le Rectangle DG, avec le quarré de la moitié AE, est égal au quarré EF, ou EB, c'est à dire *par* 47. 1. aux deux quarrez AE, AB, pris ensemble; c'est pourquoy si l'on ôte de chaque côté le quarré AE, il restera le seul Rectangle DG égal au seul quarré ABCD : & si de ces deux Plans égaux on ôte le Rectangle commun AI, on connoîtra que le quarré AG est égal au Rectangle BI. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

SCOLIE.

Cette ligne AB ainsi divisée en H, est dite par Euclide, *coupée en la moyenne & extrême raison* : & la partie BH Déf. 3. 6.

est

Déf. 36. est moindre que l'autre partie AH, parce qu'elle est moindre que AE, moitié de AB, à cause de AB moindre, *par Prop.* 19. 1, que EB, ou que EF, & qu'en ôtant de ces grandeurs inégales AB, EF, les grandeurs égales AH, AF, il reste BH moindre que AE.

USAGE.

15. Fig. Entre les differens usages de cette ligne ainsi coupée; nous dirons seulement icy qu'elle sert pour inscrire dans un cercle, un Pentagone regulier, & aussi un *Pentedecagone* regulier, c'est à dire un Polygone regulier de quinze côtez, comme il sera enseigné dans les *Prop.* 11. *&* 16. *du Liv.* 4.

On s'en sert encore tres-utilement pour trouver les Sinus d'un arc de 18. degrez, parce que nous démontrerons dans la *Prop.* 10. 4. que la plus grande partie AH est le côté du Decagone regulier inscriptible dans un cercle, dont le rayon est AB, & par consequent la corde d'un arc de 36 degrez, dont la moitié sera le Sinus de 18 degrez. Mais pour trouver cette corde AH, en supposant le Sinus Total AB de 100000 parties, & par consequent sa moitié AE de 50000, ajoûtez ensemble les quarrez 10000000000, 2500000000, de ces deux lignes, & la somme 12500000000 sera *par* 47. 1. le quarré BE, c'est pourquoy en prenant la Racine quarrée de cette somme, on aura 111805 pour la ligne BE, ou EF son égale, d'où ôtant la ligne AE, qui vaut 50000, on aura 61803 pour AF, ou pour la corde AH de 36 degrez, dont la moitié 30901 est le Sinus de 18 degrez.

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Aux Triangles amblygones, le quarré du côté opposé à l'angle obtus est égal à la somme des quarrez des deux autres côtez, & à deux Rectangles égaux entre eux, dont chacun est compris sous l'un des deux côtez de l'angle obtus & la partie de ce côté prolongé, comprise entre l'angle obtus, & la perpendiculaire tirée de l'angle opposé sur le même côté.

16. Fig. JE dis que si l'angle aigu C du Triangle amblygone ABC, on tire sur son côté opposé AB prolongé, la perpendiculaire CD le quarré du côté AC opposé à l'angle B obtus, est égal aux deux quarrez AB, BC, & à deux Rectangles égaux entre eux, chacun desquels

est

est compris sous le côté AB, & la partie BD terminée par l'angle obtus B, & par la perpendiculaire CD. 16. Fig.

C'est à dire que si le côté AB est par exemple de 4 pieds, le côté BC de 13, le côté AC de 15, & la partie BD de 5, auquel cas la perpendiculaire CD sera de 12 pieds; le quarré 225 du côté AC, est égal à la somme du quarré 16 du côté AB, du quarré 169 du côté BC, & du double 40 du Rectangle 20 sous le côté AB, & la partie BD.

DEMONSTRATION.

Parce que par *Prop.* 4. le quarré AD est égal aux quarrez AB, BD, & à deux Rectangles sous AB, BD, si à ces deux quantitez égales on ajoûte le quarré CD, on connoîtra que la somme des deux quarrez AD, CD, ou *par* 47. 1. le seul quarré AC, est égal au quarré AB, à la somme des deux quarrez BD, CD, c'est à dire *par* 47. 1. au quarré BC, & à deux Rectangles sous AB, BD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Pour rendre plus sensible la démonstration de ce Theorême, faites sur CD le quarré CE, sur AD le quarré AG, sur BD le quarré BF, & sur AB le quarré BK, & prolongez le côté BL jusques en H: & alors il sera facile de connoître que chacun des deux Rectangles HK, HF, est fait sous AB, BD, & qu'ensemble avec le quarré BK, & les deux quarrez BF, CE, c'est à dire *par* 47. 1. le quarré BC, il sont égaux aux deux quarrez AG, CE, ou *par* 47. 1. au seul quarré AC.

USAGE.

Cette Proposition sert pour connoître quand il y a un angle obtus dans un triangle, dont on connoît les trois côtez, sçavoir lorsque le quarré du côté opposé à cet angle sera plus grand que la somme des quarrez des deux autres côtez.

On s'en sert aussi pour connoître la quantité de la perpendiculaire d'un triangle amblygone, lorsqu'elle tombe en dehors, ce qui arrive toûjours quand elle tombe de l'un des deux angles aigus, comme nous avons reconnu dans la *Prop.* 17. Cette perpendiculaire, comme CD, se trouvera par le moyen des trois côtez connus du triangle ABC, en cette sorte.

Parce que nous avons supposé le côté AB de 4 pieds, le côté BC de 13, & le côté AC de 15, le quarré de AC sera

16. Fig. sera 225, le quarré de AB sera 16, & le quarré de BC sera 169: la somme de ces deux derniers 16, 169, sera 185, laquelle étant ôtée du premier 225, il restera 40, dont la moitié 20 sera le Rectangle sous AB, BD: c'est pourquoy si l'on divise ce Rectangle 20 par sa largeur AB, qui est supposée de 4 pieds, on aura 5 pieds pour sa longueur BD, dont le quarré 25, étant ôté du quarré 169 du côté BC, il restera 144 pour le quarré de la perpendiculaire CD, *par* 47. 1. c'est pourquoy si de ce reste 144 on prend la Racine quarrée, on aura 12 pieds pour la perpendiculaire CD.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

Dans quelque Triangle rectiligne que ce soit, le quarré du côté opposé à un angle aigu, avec deux Rectangles compris sous le côté sur lequel tombe la perpendiculaire de l'angle opposé, & sous la partie comprise entre la perpendiculaire & l'angle aigu, est égal à la somme des quarrez des deux autres côtez.

17. Fig. JE dis que si du Triangle ABC l'angle B est aigu, le quarré du côté AC opposé à cet angle aigu B, avec deux Rectangles compris sous le côté AB, & la partie BD comprise entre l'angle aigu B; & la perpendiculaire CD, qui tombe de l'angle C opposé au côté AB, est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtez AB, BC.

C'est à dire que si le côté AB est par exemple de 14 pieds, le côté BC de 13, le côté AC de 15, & la partie BD de 5, auquel cas la perpendiculaire CD sera de 12 pieds, la somme 365 du quarré 225 du côté AC, & du double 140 du Rectangle 70 sous AB & BD, est égale à la somme du quarré 196 du côté AB, & du quarré 169 du côté BC.

DEMONSTRATION.

Parce que *par Prop.* 7. la somme des deux quarrez AB, BD, est égale à la somme du quarré AD, & au double Rectangle sous AB, BD, si l'on ajoûte de chaque côté le quarré de la perpendiculaire CD, on connoîtra que la somme du quarré AB, & des deux quarrez BD, CD, c'est à dire *par* 47. 1. du quarré

quarré BC, est égale à la somme des deux quarrez AD CD, ou *par* 47. 1. du seul quarré AC, & du double Rectangle sous AB, BD. *Ce qu'il falloit démontrer.* 17. Fig.

SCOLIE.

Pour rendre plus sensible la démonstration de ce Theoréme, décrivez sur AB le quarré AE, sur BD le quarré DG, & prolongez le côté GH jusques en I, & la perpendiculaire CD jusques en K : & alors on connoîtra aisément que chacun des deux Rectangles DE, AG, est fait sous les lignes AB, BD, & que le Rectangle IK est le quarré de la ligne AD. Nous prendrons donc le quarré AD pour IK, & le double du Rectangle sous les lignes AB, BD, pour la somme des deux DE, AG: & comme cette somme avec le quarré IK, est égale au quarré AB & au quarré DG, parce que dans la somme des deux Rectangles DE, AG, le quarré DG se prend deux fois, si de chaque côté on ajoûte le quarré CD, on connoîtra que la somme du double Rectangle sous AB, BD, & des deux quarrez AD, CD, c'est à dire *par* 47. 1. du seul quarré AC, est égal à la somme du quarré AB, & des deux quarrez BD, CD, ou *par* 47. 1. du seul quarré BC.

USAGE.

Cette Proposition sert pour connoître quand un angle proposé est aigu dans un triangle, dont on connoît les trois côtez, ce qui arrivera lorsque le quarré du côté opposé à cet angle sera moindre que la somme des quarrez des deux autres côtez.

On s'en sert aussi pour trouver la longueur de la perpendiculaire d'un triangle, lorsqu'elle tombe en dedans, ce qui arrivera toûjours, quand chacun des deux angles à la base sera aigu. Cette perpendiculaire, comme CD, se trouvera par le moyen des trois côtez connus du triangle ABC, en cette sorte.

Parce que nous avons supposé le côté AB de 14 pieds, le côté BC de 13, & le côté AC de 15, le quarré de AB sera 196, le quarré de BC sera 169, & le quarré de AC sera 225, lequel étant ôté de la somme 365 des deux premiers 196, 169: il restera 140, dont la moitié 70 est le Rectangle sous AB, BD: c'est pourquoy si l'on divise 70 par 14, qui est AB, on aura 5 pour BD, dont le quarré 25 étant ôté du quarré 169 du côté BC, le reste 144 sera le quarré de la perpendiculaire CD, *par* 47. 1. C'est pourquoy la Racine quarrée 12 de ce reste 144, sera la quantité de la perpendiculaire CD.

PRO-

16e Fig.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME II.

Reduire un Rectiligne donné en Quarré.

COmme l'on peut reduire un Rectiligne en un Rectangle *par Prop*. 45. 1. il est évident que pour reduire en Quarré un Rectiligne proposé, il ne faut que sçavoir reduire en Quarré un Rectangle donné, comme ABCD, en cette sorte.

Ayant prolongé l'un des côtez comme AB en E, en sorte que la ligne BE soit égale à l'autre côté BC, & ayant divisé toute la ligne AE en deux également au point F, décrivez de ce point F, par les deux points A, E, le demi-cercle AGE, & prolongez le côté BC jusques en G. La ligne BG sera le côté d'un Quarré égal au Rectangle proposé ABCD.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne AE est coupée en deux également au point F, & en deux inégalement au point B, le Rectangle sous les parties inégales AB, BF, c'est à dire AC, avec le quarré de la partie d'entre-deux FB, est *par Prop*. 5. égal au quarré FE, ou FG, c'est à dire, *par* 47. 1. aux deux quarrez BF, BG, c'est pourquoy ôtant le quarré commun BF, il reste le Rectangle AC, égal au Quarré BG. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

SCOLIE.

Sans prolonger le côté AB, divisez-le en deux également au point I, pour décrire de ce point I, par les points A, B, le demi-cercle AKB, & ayant pris la ligne AH égale au côté AD, tirez du point H la droite HK perpendiculaire au côté AB, & par le point K, où la circonference AKB se trouve coupée par la perpendiculaire HK, tirez au point A, la droite AK, dont le quarré sera égal au Rectangle proposé ABCD.

DEMONSTRATION.

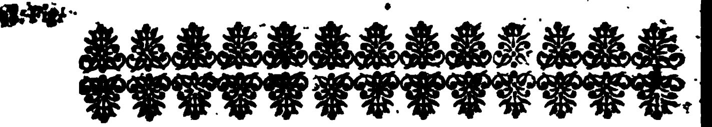
Parce que la ligne AB est coupée en deux également au point I, & en deux inégalement au point H, le Rectangle sous les parties inégales AH, BH, avec le quarré de la partie d'entre-deux HI, sera *par Prop.* 5. égal au quarré de la moitié AI, ou IK, c'est à dire *par* 47. 1. aux deux quarrez HK, HI; c'est pourquoy si l'on ôte de chaque côté le quarré HI, il restera le seul Rectangle sous les lignes AH, BH, égal au seul quarré HK, & si à chacun de ces deux Plans égaux on ajoûte le quarré AH, on connoîtra que la somme du Rectangle sous les parties AH, BH, & du quarré AH, c'est à dire *par Prop.* 3. le Rectangle proposé ABCD, est égal à la somme des deux quarrez AH, HK, ou *par* 47. 1. au seul quarré AK. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Il peut arriver que le point H convienne avec le point I, sçavoir lorsque la longueur AB sera double de la largeur AD, auquel cas la ligne HI sera égale à o, ce qui change si peu la démonstration, qu'il est inutile d'en parler davantage.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la resolution de la *Prop.* 25. 6. où ce Problême se trouve resolu plus généralement.

LIVRE



LIVRE III.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

EUclide explique dans ce Livre la nature & les proprietez de la figure la plus parfaite de toutes, qui est le cercle, en comparant les diverses lignes qu'on peut tirer tant au dedans qu'au dehors de sa circonference, par les differens angles qui s'y forment, & par les attouchemens d'une ligne droite & de la circonference d'un Cercle, ou de deux circonferences de cercle : & il donne les premiers principes des Instrumens qui servent à l'Astronomie, & aux autres Arts, où l'on a de la peine à se passer du Cercle.

DEFINITIONS.

I.

Les *Cercles égaux* sont ceux, dont les Diametres, ou bien les Demi-diametres sont égaux entre eux.

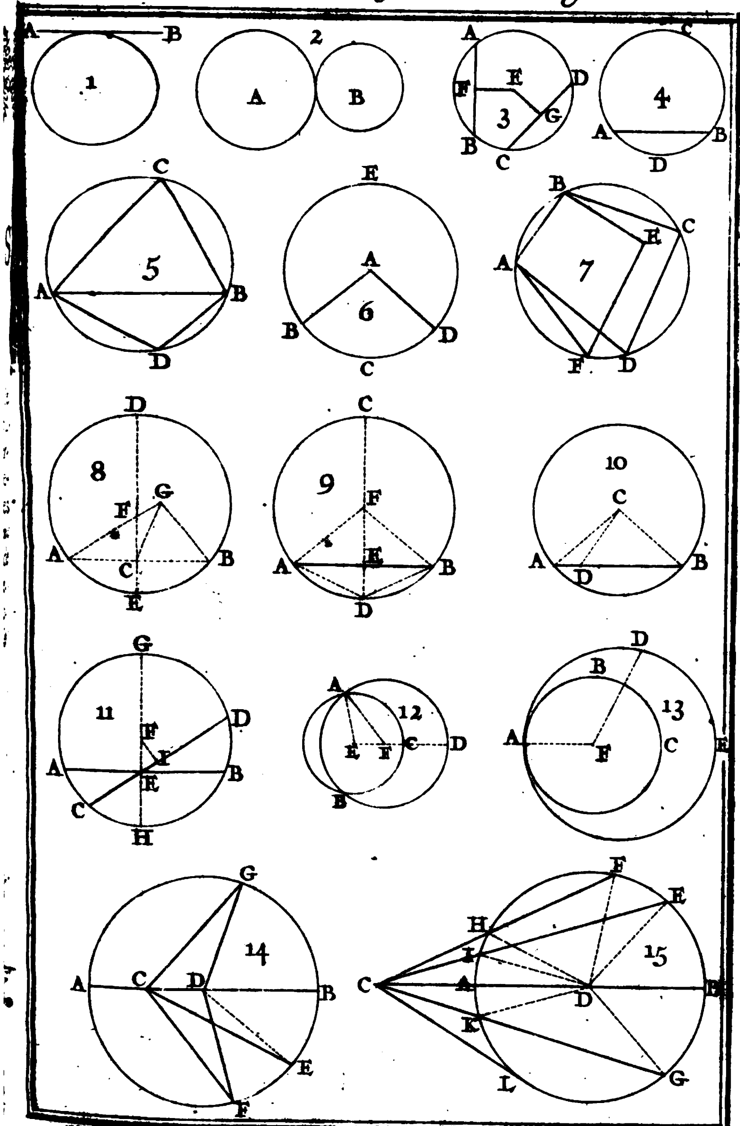
II.

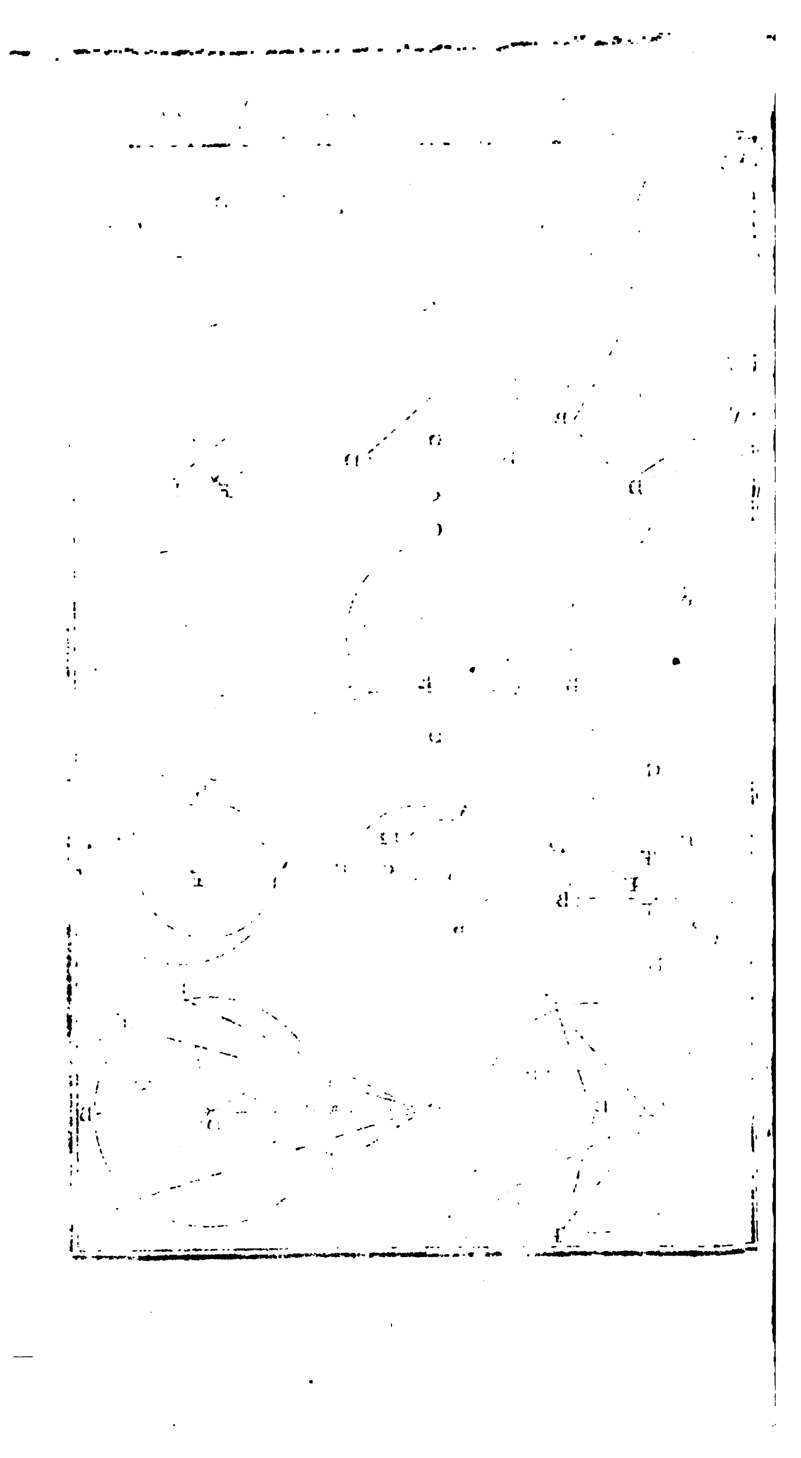
On dit qu'*une Ligne droite touche un Cercle*, lorsqu'elle rencontre la circonference de ce cercle sans faire avec elle un angle, c'est à dire sans la couper, ou sans entrer au dedans étant prolongée : *comme AB, qu'on appelle* Touchante, *pour la differencier de la* Tangente, *qui est un terme affecté à la* Trigonometrie.

Planche 1. 1. Fig.

III.

On dit que *deux Cercles se touchent*, lorsque leurs cir-


1 A B
2 A B
3 A B C D E F G
4 A B C D
5 A B C D
6 A B C D E
7 A B C D E F
8 A B C D E F G
9 A B C D E F
10 A B C D
11 A B C D E F H I G
12 A B C D E F
13 A B C D E F
14 A B C D E F G
15 A B C D E F G H I K L



circonferences se rencontrent sans se couper: comme 2. Fig. A, & B.

I V.

On dit que *deux lignes droites sont également éloignées du centre d'un cercle*, lorsque les deux perpendiculaires tirées du centre sur ces deux lignes, sont égales entre elles. *Ainsi on connoît que les deux lignes AB, CD, sont* 3. Fig. *également éloignées du centre E, parce que leurs perpendiculaires EF, EG, sont égales entre elles.*

V.

Le *Segment de Cercle*, qu'on appelle aussi *Portion de* 4. Fig. *Cercle*, est la partie d'un cercle, terminée par une ligne droite & par une partie de la circonference du même cercle: *comme ABC, ou ABD.*

Il est évident que lorsque la ligne droite AB passera par le centre du Cercle, les deux Segmens ACB, ADB, seront égaux entre eux, parce que chacun sera un Demi-cercle. Mais comme nous avons déja dit dans *Déf.* 8. 1. on entend ordinairement pour segment de cercle, une partie du cercle plus grande qu'un Demi-cercle, comme ACB, ou plus petite, comme ADB.

V I.

L'*Angle d'un Segment* est l'angle mixte que forme la circonference d'un cercle avec la ligne droite, qui termine le segment. *Ainsi on connoît que l'Angle du Segment ACB, est l'angle mixte BAC: & que l'Angle du Segment ADB, est l'angle mixte BAD, ou ABD.*

Il est évident que l'angle d'un Segment plus petit qu'un Demi-cercle est aigu, que l'Angle d'un Segment égal à un Demi-cercle, est droit, & que l'Angle d'un Segment plus grand qu'un Demi-cercle est obtus.

V I I.

L'*Angle dans un Segment* est un angle compris de 5. Fig. deux lignes droites, qui partent d'un point de l'arc du Segment, & qui aboutissent aux deux extremitez de la ligne droite, qui sert de base à ce segment. *Ainsi on dit que l'Angle rectiligne ACB est dans le Segment ABCA, & que l'Angle rectiligne ADB est dans le Segment ABDA.*

5. Fig. Il est évident que l'angle ACB, qui est dans le plus grand Segment ABCA, est moindre que l'angle ADB, qui est dans le plus petit Segment ABDA. On dit que l'angle ACB s'appuye sur l'arc ADB, & que pareillement l'angle ADB s'appuye sur l'arc ACB. On dit aussi qu'un Segment est *capable* d'un tel angle, lorsque l'angle dans ce Segment est égal à cet angle.

VIII.

Les *semblables Segmens de cercle* sont ceux qui sont capables d'angles égaux.

On peut dire de la même façon que les *Arcs semblables de cercle* sont ceux, sur lesquels se forment des angles égaux au centre, ou bien à la circonference. Mais on appelle *Angle au Centre*, ou *Angle du Centre*, celuy qui se fait au centre d'un Cercle, ou d'un Polygone regulier, qui est le même que celuy du Cercle circonscrit.

IX.

Le *Secteur de Cercle* est la partie d'un Cercle, terminée par deux demi-diametres, & par une partie de la circonference du Cercle : *comme la figure ABCD*, *ou bien la figure ABED*.
6. Fig.

Il ne faut pas que les deux Rayons AB, AD, fassent une même ligne droite, parce qu'au lieu d'un Secteur on auroit un Demi-cercle. Ainsi un Secteur de Cercle est necessairement plus grand, ou moindre qu'un Demi-cercle, comme ABCD, ou plus grand, comme ABED.

X.

7. Fig. On dit qu'*un Quadrilatere est inscrit dans un Cercle*, lorsque le sommet ou la pointe de chacun de ses angles touche la circonference du Cercle ; *comme ABCD*.

PROPOSITION I.

PROBLEME I.

Trouver le centre d'un Cercle donné.

8. Fig. POur trouver le centre du Cercle, dont la circonference est ADBE, tirez en dedans une ligne quelconque AB, & l'ayant divisée en deux également au point C, tirez par ce point C, la droite DE per-

pendiculaire à la ligne AB : & parce que dans cette perpendiculaire CE le centre du Cercle se rencontre, il n'y aura qu'à la diviser en deux également au point F, qui sera le centre qu'on cherche, ce que nous aurons démontré, en faisant voir que le centre du cercle est dans la perpendiculaire DE. Planche 1. Fig. 8.

PREPARATION.

Supposons que le centre du Cercle soit G, sans considerer où ce point G tombe, & tirons de ce point G aux deux extremitez A, B, de la ligne AB, & par son point de milieu C, les droites GA, GB, GC.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux Triangles AGC, BGC, sont égaux entre eux, *par* 8. 1. puisqu'ils ont le côté commun GC, le côté GA égal au côté GB, *par Déf. du Cercle*, & le côté AC égal au côté BC, *par constr.* l'angle GCB sera égal à l'angle GCA, & ainsi chacun de ses deux angles sera droit, & par consequent égal à l'angle DCB, qui est aussi droit, *par constr.* Ce qui fait que les deux angles DCB, GCB, étant égaux entre eux, la ligne CG, tombe sur la ligne CD, & que par consequent le centre G est dans CD, ou DE, *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que le Centre d'un Cercle se trouve dans une ligne droite, qui divise une autre ligne droite tirée dans le Cercle, à angles droits, & en deux également.

USAGE.

Cette Proposition sert pour les suivantes, qui supposent par tout que le Centre du Cercle, dont il s'agit, est trouvé.

Planche 1. 20. Fig.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

La ligne droite tirée par deux points pris à discretion sur la circonference d'un Cercle, est toute dans le Cercle.

JE dis que la ligne droite AB tirée par les deux points A, B, pris à volonté sur la circonference du Cercle, dont le centre est C, est toute dans le Cercle : c'est à dire que tel point que l'on voudra de cette ligne, comme D, est plus proche du centre C, que l'un des deux points A, B, qui sont à la circonference.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré les droites CA, CB, CD, on connoîtra que puisque le point C est le centre du Cercle, les deux lignes CA, CB, sont égales entre elles, & que *par* 5. 1. les deux angles A, B, sont égaux entre eux : & parce que l'angle ADC est exterieur à l'égard du triangle BDC, il est *par* 16. 1. plus grand que l'interieur opposé B, ou que A son égal : c'est pourquoy *par* 19. 1. le côté CA sera plus grand que le côté CD, & le point D par consequent plus proche du centre C que le point A. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition qu'une ligne droite ne touche la circonference d'un Cercle qu'en un point, parce que si elle la touchoit en deux, elle seroit tirée d'un de ses points à l'autre, & ainsi elle entreroit au dedans du Cercle, & couperoit par consequent sa circonference, & ne la toucheroit pas.

USAGE.

Cette Proposition sert à plusieurs des Propositions suivantes, qui supposent qu'une ligne droite tirée d'un point à un autre point de la circonference d'un cercle, tombe toute au dedans du cercle : & c'est sur ce fondement que l'on peut démontrer qu'une Sphere touche un Plan en un seul point.

PRO-

PROPOSITION III.

Planche 1. 9. Fig.

THEOREME II.

Si le Diametre d'un Cercle divise en deux également une ligne droite qui ne passe pas par le centre, il la coupera à angles droits : & s'il la coupe à angles droits, il la divisera en deux également.

JE dis premierement que si le Diametre CD, du cercle ACBD, coupe en deux également au point E, la ligne AB, qui ne passe pas par le centre F, chacun des deux angles CEA, CEB, sera droit.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les rayons AF, BF, on connoîtra *par* 8. 1. que les deux triangles FEA, FEB, sont égaux entre eux, à cause du côté EF commun, du rayon AF égal au rayon BF, *par Déf. du Cercle*, & de la ligne AE égale à la ligne BE, *par supp.* C'est pourquoy les deux angles AEF, BEF, seront aussi égaux entre eux ; & par consequent droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu que si le diametre CD est perpendiculaire à ligne AB, en sorte que chacun des deux angles qui se font au point E, soit droit, la ligne AB sera divisée en deux également à ce point E, c'est à dire que les côtez AE, BE, des deux triangles rectangles AEF, BEF, seront égaux entre eux, comme l'on connoît *par* 26. 1. à cause des deux angles égaux A, B, *par* 5. 1. & du côté commun EF semblablement posé, ou du côté AF égal au côté BF.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 4. 14. & 35. & l'on s'en sert dans la Trigonometrie pour démontrer que la corde d'un arc est double du Sinus de la moitié de cet arc : comme icy, que la corde AB est double du Sinus AE de l'arc AD qui est égal à la moitié de l'arc ADB, comme il est aisé de connoître par *Prop.* 28. en tirant les cordes

Planche 5. 9. Fig. AD, BD, qui sont égales entre elles, parce que le quarré AB est *par* 47. 1. égal aux deux quarrez AE, DE, ou BE, DE, & que le quarré BD est aussi égal aux mêmes quarrez BE, DE, *par* 47. 1. &c. Ou bien sans recourir à la *Prop.* 28. on connoît que dans les triangles égaux AEF, BEF, les angles AFE, BFE, sont égaux entre eux, & que par consequent les arcs AD, BD, qui les mesurent, seront aussi égaux entre eux.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

Deux lignes droites, qui se coupent dans un cercle en un point qui n'est pas son centre, ne se coupent pas également l'une & l'autre.

11. Fig. JE dis que si dans le cercle ADBC, dont le centre est F, les deux lignes droites AB, CD, s'entrecoupent au point E different du centre F, ces deux lignes AB, CD, ne se coupent pas mutuellement en deux parties égales, c'est à dire que bien que les deux parties de l'une, comme AE, BE, puissent être égales entre elles, les deux parties de l'autre, CE, DE, ne peuvent pas en même temps être aussi égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Puisque l'on suppose que la ligne AB, est divisée en deux également au point E, si l'on tire par ce point E & par le centre F, le diamètre GH, l'angle FEB sera droit *par Prop.* 3. c'est pourquoy l'angle FED sera aigu, ce qui fait que si du centre F, on tire la ligne FI perpendiculaire à la ligne CD, cette perpendiculaire FI divisera *par Prop.* 4. la ligne CD en deux également au point I, qui sera different du point E. Puisque donc les deux parties CI, DI, sont égales entre elles, les deux CE, DE, seront inégales. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 1. 12. Fig.

PROPOSITION V.

THEOREME IV.

Deux cercles qui se coupent, ont des centres differens.

JE dis que les centres E, F, des deux cercles ABC, ABD, qui se coupent en A, sont differens, de sorte qu'ils ne conviennent pas ensemble.

PREPARATION.

Joignez les deux centres E, F, par la ligne droite FD, sans considerer si cette ligne FD a de l'étenduë, & la continuez jusqu'à ce qu'elle coupe les circonferences des deux cercles aux points C, D. Tirez encore par pensée les droites EA, FA.

DEMONSTRATION.

Parce que par *Defin. du Cercle*, la ligne FA est égale à la ligne FD, ou FC+CD, & la ligne EA à la ligne EC, ou FC+EF, la difference des deux lignes FA, EA, sera égale à la difference des deux FC+CD, FC+EF, c'est à dire des deux CD, EF: & parce que la ligne CD est réelle, la difference des deux lignes FA, EA, sera aussi réelle, & les deux centres E, F, seront par consequent differens. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Nous avons changé la démonstration d'Euclide, pour en voir une directe, parce que les indirectes n'éclairent pas si bien l'esprit. Neanmoins comme cette démonstration dépend de quelques Axiomes, dont nous n'avons point parlé, nous expliquerons icy en peu de mots la démonstration d'Euclide, qui me semble plus facile pour les Commençans.

Si les deux centres E, F, convenoient ensemble, en sorte que le centre E fût commun aux deux Cercles ABC, ABD, chacune des deux lignes EC, ED, seroit égale à la même ligne EA, par *Déf. du Cercle*, & par consequent ces deux lignes EC, ED, seroient égales entre elles, c'est à dire que la partie seroit égale au Tout, ce qui est absurde, &c.

Planche I. 12. Fig.

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer que deux circonferences de cercle ne se peuvent couper qu'en deux points, comme vous verrez dans la *Prop.* 10.

PROPOSITION VI.

THEOREME V.

13. Fig. *Deux Cercles qui se touchent en dedans, n'ont pas un même centre.*

JE dis que si les deux cercles ABC, ADE, se touchent au point A, ils n'ont pas un même centre, comme par exemple F.

PREPARATION.

Tirez du centre commun supposé F, au point d'attouchement A, la droite FA, & une autre droite quelconque FD, qui coupe la circonference du grand cercle au point D, & la circonference du petit au point B.

DEMONSTRATION.

Si le point F étoit le centre commun aux deux cercles ABC, ADE, les deux lignes FB, FD, seroient égales chacune à la même ligne FA, & par consequent égales entre elles, ce qui est impossible, parce que la ligne FD est essentiellement plus grande que la ligne FB. Il est donc impossible aussi que le point F soit le centre commun aux deux cercles ABC, ADE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Euclide démontre cette Proposition seulement dans le cas auquel les deux cercles se touchent l'un l'autre en dedans, parce qu'il est évident, que quand ils se touchent en dehors, ils ne peuvent pas avoir un même centre.

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer les *Prop.* 11. & 12. qui supposent que les Cercles qui se touchent en dedans ou en dehors, ont des centres differens.

PRO-

PROPOSITION VII.

Planche 1. 14. Fig.

THEOREME VI.

Si d'un point autre que le centre, pris à discretion sur le diametre d'un cercle, on tire plusieurs lignes droites jusqu'à la circonference, la plus grande de toutes est la partie du Diametre où se rencontre le centre, & la plus petite est le reste du Diametre. Quant aux autres lignes, la plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée : & l'on ne sçauroit tirer de ce même point plus de deux lignes droites entre elles, de part & d'autre de la plus petite, ou de la plus grande.

JE dis premierement que si sur le diametre AB, on prend ailleurs qu'au centre D du cercle AGBF, un point à discretion, comme C, & que l'on tire plusieurs lignes droites jusqu'à la circonference, comme CE, CF, &c. la ligne CB, où le centre D se rencontre, est la plus grande de toutes, par exemple plus grande que la ligne CE.

DEMONSTRATION.

Parce que du triangle CDE, les deux côtez CD, DE, pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme CE, *par* 20. 1. & que les deux CD, DE, sont ensemble égaux à la ligne CB, à cause du rayon DE égal au rayon DB, par *Déf. du centre*, il s'ensuit que la ligne CB est plus grande que la ligne CE. *Ce qu'il falloit démontrer.* On démontrera de la même façon que la ligne CB est plus grande que la ligne CF, & que toute autre que l'on tirera du point C.

Je dis en second lieu, que la ligne CA qui est le reste du Diametre AB, est la plus petite de toutes, par exemple plus petite que la ligne CF.

Planche 1. 14. Fig.

DEMONSTRATION.

En tirant le rayon DF, on connoîtra comme auparavant, que du triangle CDF, les deux côtez CD, CF, pris ensemble sont plus grands que le troisiéme DF, ou DA, c'est pourquoy si l'on ôte CD de chaque côté, on connoîtra que la ligne CF est plus grande que la ligne CA. *Ce qu'il falloit démontrer.* Cela s'ensuit aussi de la démonstration suivante.

Je dis en troisiéme lieu, que la ligne CB qui est plus proche de la plus grande CB, est plus grande que la ligne CF, qui en est plus éloignée.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez CD, DE, du triangle CDE, sont égaux aux deux côtez CD, DF, du triangle CDF, & que l'angle compris CDE, est plus grand que l'angle compris CDF, la base CE sera *par.* 24. 1. plus grande que la base CF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Enfin je dis que du même point C, on ne peut tirer que deux lignes égales jusqu'à la circonference, comme par exemple CF, CG, en supposant qu'on ait fait de part & d'autre les deux angles égaux CDF, CDG.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez CD, DF, du triangle CDF, sont égaux aux deux côtez CD, DG, du triangle CDG, & l'angle compris CDF égal à l'angle compris CDG, les bases CF, CG, seront égales entre elles, *par.* 4. 1. & comme toutes les lignes qu'on peut tirer d'un côté ou d'autre, seront ou plus proches de CB, ou plus éloignées, & par consequent plus grandes ou plus petites que CF, ou CG, il s'ensuit qu'on n'en peut tirer que deux égales. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

On se sert de cette Proposition dans l'Astronomie, pour démontrer les differentes distances d'une Planete à la Terre, & pour faire voir qu'elle est la plus éloignée de la Terre qu'elle puisse être dans son veritable Apogée, & le plus proche de la Terre qu'il soit possible dans son vray Perigée.

PRO-

PROPOSITION VIII.

Planche 1. 15. Fig.

THEOREME VII.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on tire autant de lignes droites, que l'on voudra, qui se terminent à la circonference concave du Cercle, la plus grande de toutes est celle qui passe par le centre: & celle qui en est plus proche est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée. Tout au contraire de celles qui tombent sur la circonference convexe, celle qui étant prolongée passe par le centre, est la plus petite de toutes: & celle qui en est plus proche, est plus petite qu'une autre qui en est plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, ou de la plus grande, on ne sçauroit mener de ce même point plus de deux lignes droites égales entre elles.

NOus entendons pour *circonference concave* celle qui regarde le dedans, & pour *circonference convexe* celle qui regarde le dehors. Cela étant supposé, je dis premierement que si du point C, pris à volonté hors du cercle AFBG, on tire plusieurs lignes droites, qui rencontrent sa circonference tant la concave que la convexe; la ligne CB, qui passe par le centre D est la plus grande de toutes celles qui arrivent à la circonference concave, par exemple plus grande que la ligne CE.

DEMONSTRATION.

Parce qu'en tirant le rayon DE; on a le triangle CDE, dont les deux côtez CD, DE, font ensemble plus grands que le troisiéme CE, *par.* 20. 1. & que les deux côtez CD, DE, font ensemble égaux à la ligne CB, à cause du rayon DE égal au rayon DB, par *Def. du centre*, il s'ensuit que la ligne CB est plus grande que la ligne CE. *Ce qu'il falloit démontrer.* On démontrera de la même façon, que la ligne CB est plus grande que la ligne CF, & que toute autre que l'on tirera du point C.

Je dis en second lieu, que la ligne CE, qui est plus proche de la plus grande CB, est plus grande que la ligne CF, qui en est plus éloignée.

Planche 1. 35. Fig.

DEMONSTRATION.

En tirant le rayon DF, on connoîtra que puisque les deux côtez CD, DE, du triangle CDE, sont égaux aux deux côtez CD, DF, du triangle CDF, & que l'angle compris CDE est plus grand que l'angle compris CDF, la base CE sera *par* 24. 1. plus grande que la base CF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en troisiéme lieu, que la ligne CA, qui étant prolongée passe par le centre D, est la plus petite de celles qu'on peut tirer du point C à la circonference convexe, par exemple plus petite que la ligne CI.

DEMONSTRATION.

Parce qu'en tirant le rayon DI, on a le triangle CID, dont les deux côtez CI, DI, pris ensemble sont plus grands que le côté CD, *par* 20 1. en ôtant les lignes égales DI, DA, on connoîtra que la ligne CA est plus petite que la ligne CI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en quatriéme lieu que la ligne CI, qui est plus proche de la plus petite CA, est plus petite que la ligne CH, qui en est plus éloignée.

DEMONSTRATION.

En tirant le rayon DH, on connoîtra *par* 21. 1. que les deux côtez CI, DI, du triangle CID, sont ensemble moindres que les deux CH, DH, pris ensemble: c'est pourquoy en ôtant les côtez égaux DI, DH, on connoîtra que la ligne CI est plus petite que la ligne CH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en cinquiéme lieu, que du même point C, on ne peut tirer que deux lignes égales jusqu'à la circonference concave, par exemple CE, CG, en supposant qu'on ait fait de part & d'autre les deux angles égaux CDE, CDG.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez CD, DE, du triangle CDE sont égaux aux deux côtez CD, DG, du triangle CDG, & l'angle compris CDE, égal à l'angle compris CDG, les bases CE, CG, seront égales entre

elles,

elles, *par* 4. 1. & comme toutes les lignes qu'on peut tirer d'un côté ou d'autre, seront ou plus proches de CB, ou plus éloignées, & par consequent plus grandes ou plus petites que CE, ou que CG, il s'ensuit qu'on n'en peut tirer que deux égales. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 11. 15. Fig.

Enfin je dis que du même point C, on ne peut tirer que deux lignes égales jusqu'à la circonference convexe, par exemple CI, CK, en supposant qu'on fait de part & d'autre les deux angles égaux CDI, CDK.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez CD, DI, sont égaux aux deux côtez CD, DK, & l'angle compris CDI du triangle CID, égal à l'angle compris CDK du triangle CKD, les bases CI, CK, seront égales entre elles, *par* 4. 1. & l'on ne peut pas en tirer une troisiéme égale, parce que selon qu'elle approchera plus ou moins de la ligne CA, elle sera plus ou moins grande. *Ce qui restoit à démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que la plus grande des lignes droites que l'on peut tirer du point C, à la circonference convexe du Cercle AFBG, est celle qui touche cette circonference, comme CL, qui la touche en L.

PROPOSITION IX.

THEOREME VIII.

Le Point duquel on peut tirer trois lignes égales jusqu'à la circonference d'un cercle, est le centre de ce cercle.

C'Est une suite de la *Prop.* 7. où il a été démontré, que d'un point qui n'est pas le centre d'un Cercle, on ne peut tirer à sa circonference que deux lignes égales, & cette Proposition n'a été icy mise que pour la démonstration de la suivante.

Planche 2. 16. Fig.

PROPOSITION X.

THEOREME IX.

Deux circonferences de cercle se coupent seulement en deux points.

IL est évident que les deux Cercles ABC, ADC, se peuvent couper en deux points, comme A, C, parce que si le point E est par exemple le centre du cercle ABC, les lignes EA, EC, tirées de ce centre E, aux points A, C, seront égales entre elles : & comme le point E ne peut pas aussi être le centre du cercle ADB, *par Prop.* 5. on a un point E autre que le centre du cercle ADB, duquel on peut tirer à sa circonference les deux lignes égales EA, EC, ce qui est possible *par Prop.* 7. où nous avons démontré qu'on ne peut pas tirer du point E à la circonference du cercle ADB, plus de deux lignes égales : d'où il est aisé de conclure que les deux cercles ABC, ADC, ne peuvent pas aussi se couper en plus de deux points. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

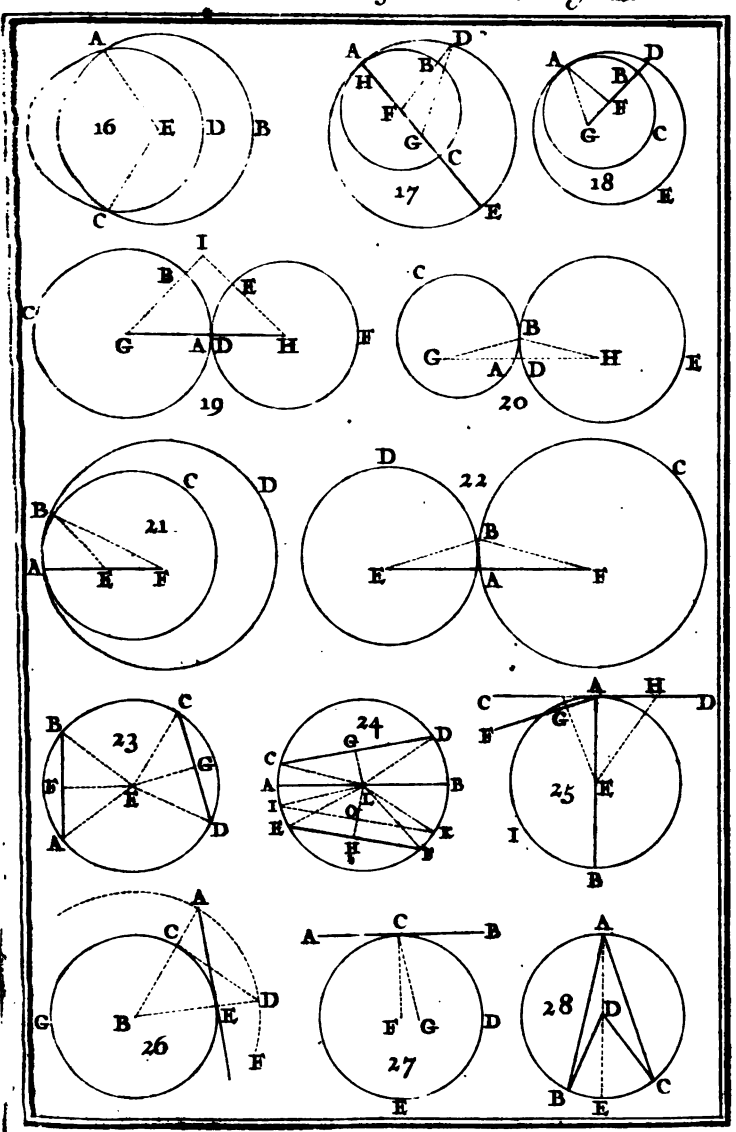
Cette Proposition sert, comme nous avons déja dit dans l'Euclide du P. Dechales, pour faire voir que les Equations de deux dimensions, qui se peuvent toutes resoudre par la jonction de deux cercles, n'ont que deux Racines, puisque les circonferences de deux cercles ne se peuvent couper qu'en deux points.

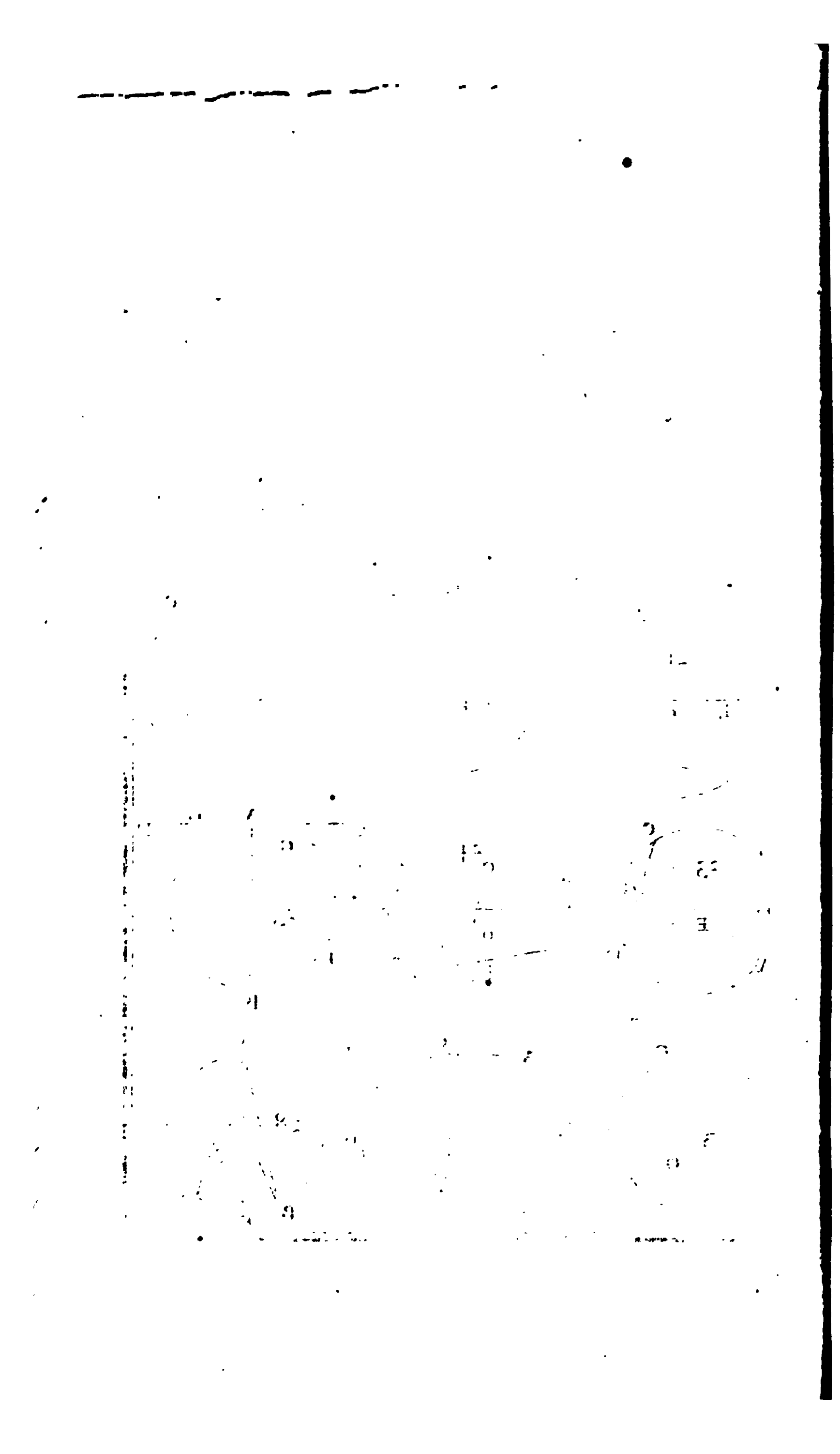
PROPOSITION XI.

THEOREME X.

Si deux cercles se touchent en dedans, la ligne droite tirée par leurs centres, étant prolongée passera par le point où ils se touchent.

17. Fig. JE dis que si par les centres F, G, des deux cercles ABC, ADE, dont les circonferences se touchent en dedans, on tire la droite FG, & qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe la circonference exterieure ADE en A, & l'interieure ABC en H; ces deux cercles se toucheront aux points A, H, c'est à dire que ces deux


16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28



deux points A, H, conviennent ensemble ; de sorte que leur distance AH est infiniment petite, & se reduit à rien. Planche 2. 17. Fig.

PREPARATION.

Tirez du centre F, une droite quelconque FD, qui coupe la circonference exterieure au point D, & l'interieure au point B, & joignez la droite GD.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez FG, FD, du triangle FDG, sont par. 20. 1. ensemble plus grands que le troisiéme GD, ou GA son égal, en ôtant FG de chaque côté, on connoîtra que la ligne FD est plus grande que la ligne FA, & en ôtant encore les deux lignes égales FB, FH, on connoîtra enfin que la ligne BD est plus grande que la ligne AH, en quelque distance que soit cette ligne BD du point d'attouchement : & comme la ligne BD approchant de plus en plus du point d'attouchement, devient toûjours plus petite, de sorte qu'elle se reduit à rien au point d'attouchement, & que neanmoins elle demeure toûjours plus grande que la ligne AH, il faut aussi que cette ligne AH se reduise à rien, & que ce soit au point H, ou A, que les deux cercles ABC, ADE, se touchent. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Nous avons icy donné une démonstration directe, laquelle par consequent est differente de celle d'Euclide, comme vous allez voir, aprés que nous aurons dit que si on prolonge la ligne FG de l'autre côté vers E, la plus grande distance CE des deux circonferences ABC, ADE, est double de la distance FG de leurs centres, parce que si aux deux lignes égales FA, FC, ou FA, FG+CG, on ajoûte la ligne commune FG, on connoîtra que la ligne GA, ou GE est égale à 2FG+CG, c'est pourquoy en ôtant CG, on connoîtra que la seule ligne CE est égale au double de la ligne FG.

Je dis donc que si les deux cercles ABC, ADE, se touchent en dedans au point A, la ligne droite tirée par le centre F du cercle ABC, & par le centre G du cercle ADE, étant continuée, passera par le point d'attouchement A, de sorte qu'elle ne peut pas aller par exemple au point D. 18. Fig.

Planche 2. 18. Fig.

DEMONSTRATION.

Car en tirant les rayons FA, GA, on connoîtra *par 20. 1.* que du triangle GFA, les deux côtez GF, FA, pris ensemble, c'est à dire GF, FB, ou la seule ligne GB est plus grande que le troisiéme côté GA, ou GD, ce qui étant impossible, il est impossible aussi que la ligne FG étant prolongée passe par un autre point que par le point d'attouchement A. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

17. Fig. Cette Proposition sert pour décrire une circonference de cercle, qui touche une autre circonference de cercle en un point donné : comme si l'on donne le point A sur la circonference du cercle donné ADE, on tirera du centre G du cercle donné par le point donné A, la droite AG, sur laquelle on pourra choisir à volonté un point comme F, pour le centre du cercle qui touchera en A le proposé ADE.

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Si deux circonferences de cercle se touchent par le dehors, la ligne droite tirée par leurs centres, passera par le point où elles se touchent.

19. Fig. JE dis que si par les centres G, H, des deux cercles ABC, DEF, dont les circonferences se touchent en dehors, on tire la droite FG, qui touche la circonference ABC au point A, & la circonference DEF au point D; ces deux cercles se toucheront aux points A, D, c'est à dire que ces deux points A, D, conviennent ensemble, de sorte que leur distance AD se reduit à rien.

PREPARATION.

Tirez par le point I, pris à discretion au dehors des deux cercles ABC, DEF, & par leurs centres G, H, les droites GI, HI, qui couperont les deux circonferences ABC, DEF, en deux points, comme B, E.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez GI, HI, du triangle GHI, sont ensemble plus grands que le troisiéme côté GH, *par* 20. 1. si l'on ôte d'un côté les deux lignes GB, HE, & de l'autre côté les deux GA, HD, qui sont égales aux deux precedentes, on connoîtra que la somme des deux lignes IB, IE, est plus grande que la ligne AD: & comme cette somme devient plus petite à mesure que le point I est plus proche du point d'attouchement, de sorte qu'elle se reduit à rien au point d'attouchement, & que neanmoins elle demeure toûjours plus grande que la ligne AD, il faut aussi que cette ligne AD se reduise à rien, & que ce soit au point A, ou D, que les deux cercles ABC, DEF, se touchent. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 2. 19. Fig.

SCOLIE.

Si cette démonstration, que nous avons renduë directe autant qu'il nous a été possible, ne vous plaît pas, suivez celle d'Euclide, qui est indirecte, comme vous allez voir.

Je dis donc que si les deux cercles ABC, BDE, se touchent par le dehors au point B, la ligne droite GH, tirée par les centres G, H, de ces deux Cercles, passera par le point d'attouchement B, de sorte qu'elle ne peut pas couper les circonferences ABC, BDE, par exemple aux deux points A, D. 20. Fig.

DEMONSTRATION.

Car en tirant les rayons BG, BH, on connoîtra *par* 20. 1. que du triangle GBH, les deux côtez GB, HB, ou les deux GA, HD, sont ensemble plus grands que le troisiéme côté GH, ce qui étant impossible, il est impossible aussi que la ligne droite GH, qui joint les centres G, H, des deux cercles proposez, passe ailleurs que par le point d'attouchement B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition & la precedente servent pour la démonstration de la suivante, qui suppose que la ligne droite tirée par les centres de deux cercles qui se touchent, passe par le *Point d'attouchement*, c'est à dire par le point où ils se touchent.

Planche 2. 21. Fig.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

Deux circonferences de cercle se touchent seulement en un point, soit qu'ils se touchent en dedans, ou en dehors.

JE dis premierement que si les deux cercles ABC, ABD, se touchent en dedans au point A, ils ne se peuvent pas toucher encore en un autre point, comme B.

PREPARATION.

Tirez par le centre E du cercle ABC, au centre F du cercle ABD, la droite EF, laquelle étant prolongée passera par le point d'attouchement A, *par Prop.* 11. & menez par les mêmes centres E, F, à l'autre point supposé d'attouchement B, les droites BE, BF.

DEMONSTRATION.

On connoît *par* 20. 1. que du triangle BEF, la somme des deux côtez EB, EF, ou EA, EF; ou la seule ligne FA, seroit plus grande que le troisiéme côté FB, ce qui étant impossible, parce que FA, FB, sont des rayons égaux, il est impossible aussi que les deux cercles ABC, ABD, qui se touchent au point A, se puissent encore toucher au point B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

22. Fig. Je dis en second lieu, que si les deux cercles ABC, ABD, se touchent en dehors au point A, ils ne peuvent pas se toucher encore en un autre point, comme B.

DEMONSTRATION.

Ayant fait une preparation semblable à la precedente, on connoîtra *par* 20. 1. que dans le triangle EBF, la somme des deux côtez EB, FB, ou EA, FA, c'est à dire la seule ligne EF, est plus grande que le troisiéme côté EF, ce qui étant impossible, il est impossible aussi que les deux circonferences de cercle ABC, ABD, qui se touchent au point A, se puissent encore toucher au point B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Sco-

Planche 2. 21. & 22. Fig.

SCOLIE.

On peut ajoûter à la démonstration de chacun de ces deux cas, que si les deux circonferences ABC, ABD, se pouvoient toucher au point A, & encore au point B, la ligne droite tirée par les centres F, G, devroit par *Prop.* 11. & 12. passer par chacun de ces deux points d'attouchement A & B, ce qui est impossible.

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIII.

Les lignes droites égales tirées dans un cercle, sont également éloignées du centre : & celles qui sont également éloignées du centre, sont égales entre elles.

23. Fig.

ON dit que *deux lignes sont dans un cercle*, lors qu'elles se terminent de part & d'autre à la circonference, comme AB, CD: & je dis premierement que si ces deux lignes AB, CD, sont égales entre elles, elles sont également éloignées du centre E, c'est à dire *par Déf.* 4. que si du centre E, on leur tire les deux perpendiculaires EF, EG, qui les diviseront en deux également aux points F, G, *par Prop.* 3. ces deux perpendiculaires EF, EG, seront égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré les rayons EA, EB, EC, ED, on connoîtra *par* 8. 1. que les deux triangles isoscéles AEB, CED, sont égaux entre eux, & que par consequent les deux angles B, C, seront aussi égaux entre eux, ce qui fait que *par* 26. 1. les deux côtez EF, EG, des deux triangles rectangles EFB, EGC, sont pareillement égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si les deux lignes AB, CD, sont également éloignées du centre E, c'est à dire si leurs perpendiculaires EF, EG, sont égales entre elles, ces deux lignes AB, CD, sont aussi égales entre elles, ce que nous aurons démontré, si nous faisons voir que leurs moitiez BF, CG, sont égales entre elles.

Planche 2. 23. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que *par* 47. 1. la somme des quarrez BF, EF, est égale au quarré du rayon BE, ou CE, & que pareillement la somme des quarrez CG, EG, est égale au quarré du même rayon EC, ces deux sommes seront égales entre elles: c'est pourquoy en ôtant les quarrez égaux EF, EG, il restera le seul quarré BF égal au seul quarré CG, & par consequent la ligne BF égale à la ligne CG, & la double AB égale à la double CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer que toutes les perpendiculaires tirées du centre d'un Polygone régulier sur chacun de ses côtez, sont égales entre elles, parce que ce centre est le même que le centre du cercle circonscrit, comme vous connoîtrez mieux, lorsque vous aurez vû le quatriéme Livre, qui traite des Polygones reguliers inscrits & circonscrits autour d'un Cercle. Nous nous servirons aussi de cette Proposition, pour démontrer un cas de la suivante: & l'on peut aussi s'en servir pour démontrer que *les petits cercles qui sont également éloignez du centre de leur Sphere, sont égaux entre eux.*

PROPOSITION XV.

THEOREME XIV.

Si l'on tire plusieurs lignes droites dans un Cercle, la plus grande de toutes est le Diametre: & celle qui est plus proche du centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

24. Fig. JE dis premierement que le Diametre AB du cercle, dont le centre est L, est la plus grande de toutes les autres lignes droites que l'on peut tirer dans ce Cercle, par exemple plus grande que la ligne CD, qui n'est pas un Diametre.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les deux rayons LC, LD, on connoîtra *par* 20. 1. que du triangle CLD, la somme des deux côtez LC, LD, ou LA, LB, c'est à dire la seule ligne AB, est plus grande que le troisiéme côté CD. *Ce qu'il*

qu'il falloit démontrer. On démontrera de la même façon, que le Diametre AB est plus grand que quelqu'autre ligne que ce soit, que l'on peut tirer dans le Cercle par un point, qui ne soit pas le centre. Planche 2. 24. Fig.

Je dis en second lieu, que la ligne EF, qui est plus éloignée du centre L que la ligne CD, est plus petite que cette ligne CD, qui en est plus proche.

PREPARATION.

Tirez du centre L, la ligne LG, perpendiculaire à la ligne CD, & la ligne LH perpendiculaire à la ligne EF : & comme cette ligne LH est plus grande que la ligne LG, parce que l'on suppose que la ligne EF est plus éloignée du centre L, que la ligne CD, on en pourra retrancher la ligne LO égale à la ligne LG, & tirer par le point O, à la ligne LH, la perpendiculaire IK, qui sera égale à la ligne CD, *par Prop.* 14. Enfin tirez les rayons LI, LK, LE, LF.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez LI, LK, du triangle ILK, sont égaux aux deux côtez LE, LF, du triangle ELF, & que l'angle compris ILK, est plus grand que l'angle compris ELF, la base IK, ou CD son égale, sera plus grande que la base EF, *par* 24. 1. *Ce qui restoit à démontrer*.

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer dans la Sphere, que les petits cercles les plus éloignez du centre de la Sphere, sont plus petits, parce qu'ils ont leurs diametres plus petits.

Planche 2. 16. Fig.

PROPOSITION X.

THEOREME IX.

Deux circonferences de cercle se coupent seulement en deux points.

IL est évident que les deux Cercles ABC, ADC, se peuvent couper en deux points, comme A, C, parce que si le point E est par exemple le centre du cercle ABC, les lignes EA, EC, tirées de ce centre E, aux points A, C, seront égales entre elles : & comme le point E ne peut pas aussi être le centre du cercle ADB, *par Prop.* 5. on a un point E autre que le centre du cercle ADB, duquel on peut tirer à sa circonference les deux lignes égales EA, EC, ce qui est possible *par Prop.* 7. où nous avons démontré qu'on ne peut pas tirer du point E à la circonference du cercle ADB, plus de deux lignes égales : d'où il est aisé de conclure que les deux cercles ABC, ADC, ne peuvent pas aussi se couper en plus de deux points. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

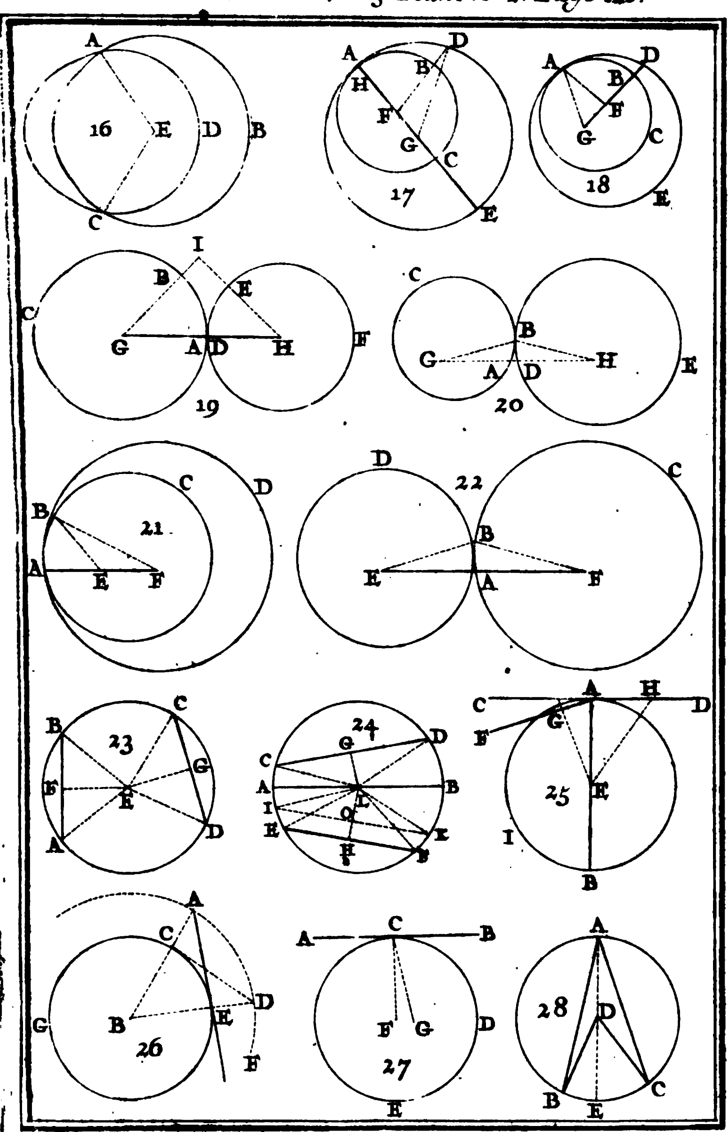
Cette Proposition sert, comme nous avons déja dit dans l'Euclide du P. Dechales, pour faire voir que les Equations de deux dimensions, qui se peuvent toutes resoudre par la jonction de deux cercles, n'ont que deux Racines, puisque les circonferences de deux cercles ne se peuvent couper qu'en deux points.

PROPOSITION XI.

THEOREME X.

Si deux cercles se touchent en dedans, la ligne droite tirée par leurs centres, étant prolongée passera par le point où ils se touchent.

17. Fig. JE dis que si par les centres F, G, des deux cercles ABC, ADE, dont les circonferences se touchent en dedans, on tire la droite FG, & qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe la circonference exterieure ADE en A, & l'interieure ABC en H; ces deux cercles se toucheront aux points A, H, c'est à dire que ces deux


16
A E D B C
17
A D B H F G C E
18
A B D F G C E
19
I B E C G A D H F
20
C B G A D H E
21
B C D A E F
22
D C B E A F
23
B C F E G A D
24
G D C A L B I Q E K H F
25
C A H D F G E I B
26
A C D G B E F
27
A C B F G D E
28
A D B E C

DEMONSTRATION.

Planche 2. 26. Fig. On connoît *par* 4. 1. que les deux triangles BAE, BDC, sont égaux entre eux, parce qu'ils ont les deux côtez BA, BE, égaux aux deux côtez BD, BC, & l'angle B compris commun, c'est pourquoy l'angle BEA sera égal à l'angle BCD, lequel étant droit, l'angle BEA sera aussi droit, & *par Prop.* 16. la droite AE touchera le cercle ECG au point E. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

L'usage des lignes touchantes est fort frequent dans la Trigonometrie tant Spherique que Rectiligne : & aussi dans la Dioptrique pour déterminer les points de reflexion sur une surface courbe, tant concave que convexe. On s'en sert aussi dans la Gnomonique, pour la description des heures Babyloniennes & Italiennes, & dans la Navigation, où nous prenons une ligne touchante pour nôtre Horizon, quand nous observons la hauteur du Soleil, ou de quelqu'autre Astre. On s'en sert tres-commodément dans la Geometrie Speculative, pour les Quadratures. Vous en aurez un exemple dans le premier Theorême de la Planimetrie, qui servira pour la Quadrature du Cercle, & de la Parabole. Nous enseignerons dans la *Prop.* 31. une autre methode plus facile, pour tirer une touchante.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVI.

La ligne droite tirée du centre du Cercle, au point où une autre ligne droite touche sa circonference, est perpendiculaire à cette autre ligne droite.

25. Fig. JE dis que si la ligne droite CD touche au point A, la circonference du cercle AIB, dont le centre est E; la ligne droite AE tirée par le point d'attouchement A, & par le centre E, est perpendiculaire à la touchante CD.

DEMONSTRATION.

Car si la ligne EA n'est pas perpendiculaire à la touchante CD, elle fera avec elle d'un côté un angle aigu,

aigu, & de l'autre côté un angle obtus: Si l'on veut que l'angle EAC par exemple, soit obtus, on en pourra retrancher l'angle droit EAF, par la ligne AF, laquelle dans ce cas étant perpendiculaire au diametre AB, touchera le Cercle au même point A, où l'on suppose que la ligne CD le touche *par Prop.* 16. & ainsi étant toute hors du cercle, on pourra tirer entre la touchante AC, & la circonference AIB, une ligne droite, ce qui est contre le second cas de la *Prop.* 16. Donc il n'y a point d'autre ligne perpendiculaire au diametre AB, que la touchante CD. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 2. 25. Fig.

SCOLIE.

Cette Proposition se peut démontrer encore en plusieurs autres manieres, entre lesquelles j'ay choisi la suivante, qui me semble la plus simple, & la plus facile de toutes.

Si la ligne EA n'est pas perpendiculaire à la touchante CD, que ce soit EH, en sorte que l'angle H soit droit, auquel cas cet angle H sera le plus grand des trois angles du triangle EAH, *par* 32. 1. & *par* 19. 1. le côté EA seroit plus grand que le côté EH, & le point H seroit au dedans du Cercle, & ainsi la ligne CD ne seroit pas une touchante. Il n'y a donc point d'autre ligne perpendiculaire à la touchante CD, que le diametre AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonstration n'est pas directe, mais on la peut rendre directe, en disant que puisque la ligne CD touche la circonference AIB, au point A, tous ses points sont plus éloignez du centre E que le point A, & ainsi toutes les lignes droites que l'on tirera du centre E par tous ces points seront plus grandes que la ligne EA, laquelle étant la plus courte de toutes, doit être perpendiculaire à la touchante CD. *par* 18. 1. &c.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & aussi des *Prop.* 32. & 36.

PRO-

Planche 2. 27. Fig.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XVII.

La perpendiculaire tirée à une ligne droite qui touche un Cercle, par le point d'attouchement, passe par le centre.

JE dis que si la ligne AB, touche au point C, la circonference du cercle CDE, & que par le point d'attouchement C, on tire la droite CF perpendiculaire à la touchante AB, le centre du cercle CDE est dans la perpendiculaire CF, ou ce qui est la même chose, cette perpendiculaire CF passe par le centre.

DEMONSTRATION.

Car si l'on suppose que le centre du cercle soit en G, & que l'on tire la droite GC, elle sera perpendiculaire à la touchante AB, *par Prop.* 18. & parce que la droite CF est aussi perpendiculaire à la touchante AB, *par supp.* les deux angles BCF, BCG, étant droits seront égaux entre eux, & la ligne CG conviendra par consequent avec la ligne CF. D'où il suit que le centre du Cercle se trouvera dans la ligne CF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

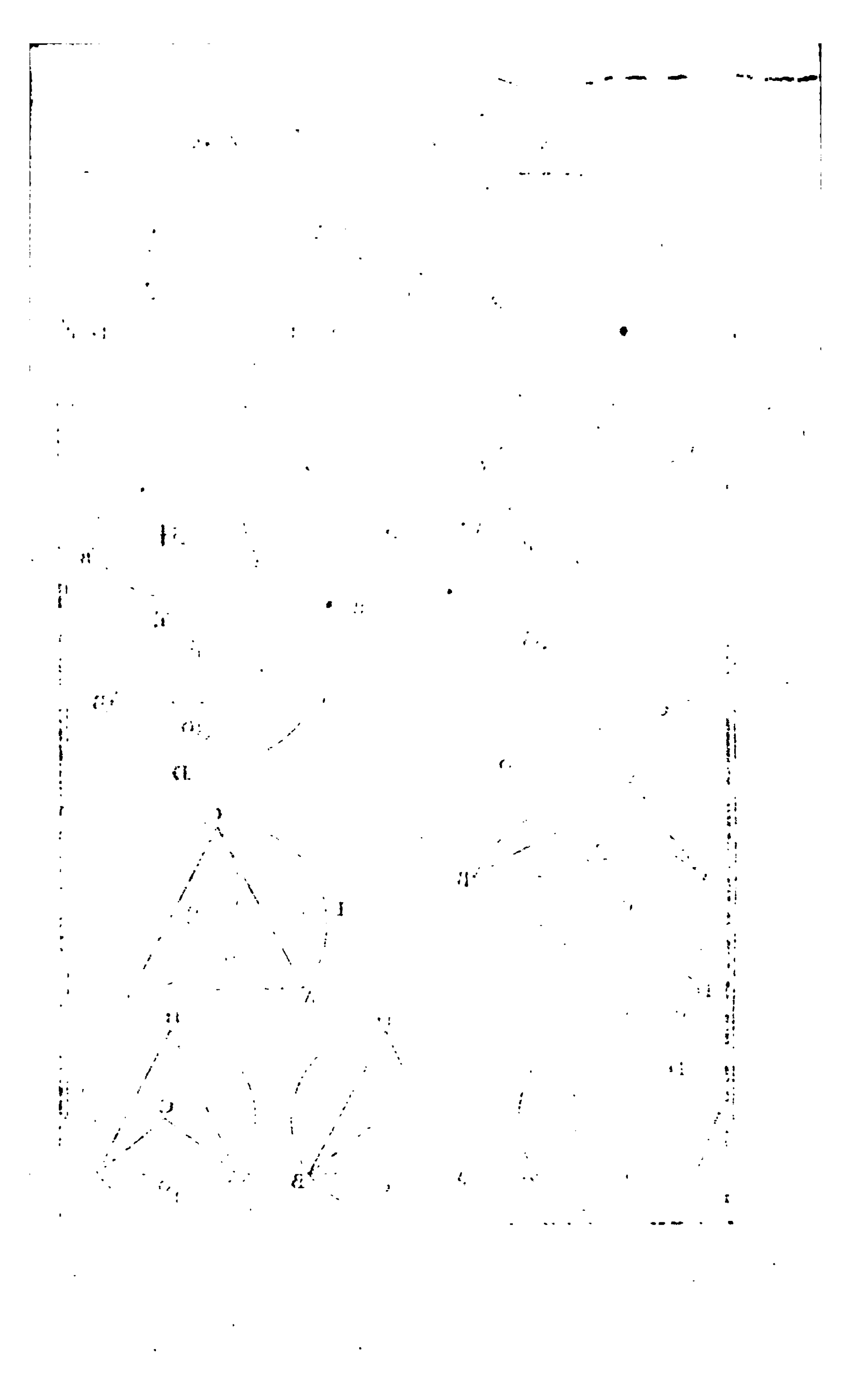
PROPOSITION XX.

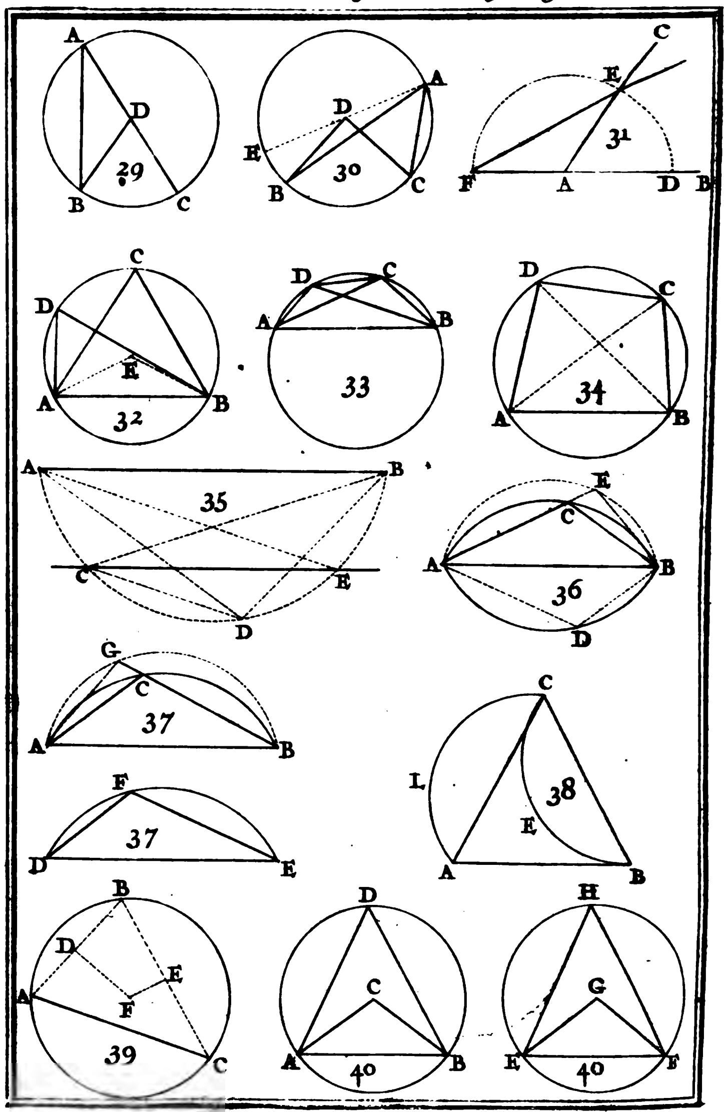
THEOREME XVIII.

L'Angle du centre est double d'un Angle à la circonference d'un Cercle, lorsque ces deux Angles ont un même arc pour base.

28. Fig. ON appelle *Angle à la circonference* celuy dont les lignes sont dans un cercle, & dont la pointe est à la circonference du même cercle, comme BAC, dont une ligne peut être en ligne droite avec des lignes de l'angle au centre BDC, comme dans la 29. *Fig.* ou bien les deux lignes peuvent renfermer l'angle au centre, comme dans la 28. *Fig.* ou bien encore l'une de ses deux lignes peut couper l'une des deux lignes de l'angle au centre, comme dans la 30. *Fig.* Dans tous

ces





A D B C 29
D A E B C 30
C E 31 F A D B
C D E A B 32
D C A B 33
D C 34 A B
A B 35 C E D
E C A B 36 D
G C 37 A B
C L 38 E A B
F 37 D E
B D E F A 39 C
D C A B 40
H G E F 40

ces cas, je dis que l'angle au centre BDC est double de l'angle à la circonference BAC. Planche 2. 28. Fig.

Démonstration du premier cas.

Parce que l'angle au centre BDC est exterieur à l'égard du triangle isoscéle ADB, il est *par* 32. 1. égal aux deux interieurs opposez A, B, lesquels étant égaux entre eux, *par* 5. 1. il s'ensuit que l'angle du centre BDC est double de l'angle à la circonference BAC. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 3. 29. Fig.

Démonstration du second cas.

Ayant tiré de l'angle A, par le centre D, la droite ADE, on connoîtra comme auparavant, que l'angle BDE est double de l'angle BAE, & l'angle CDE double de l'angle CAE. D'où il suit que tout l'angle BDC est double de tout l'angle BAC. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 2. 28. Fig.

Démonstration du troisiéme cas.

Ayant mené pareillement la droite ADE, on connoîtra aussi comme auparavant, que l'angle BDE est double de l'angle BAE, & que tout l'angle CDE est double de tout l'angle CAE. D'où il est aisé de conclure que l'angle restant CDB est double de l'angle restant CAB. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 3. 30. Fig.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la suivante, & l'on peut s'en servir pour diviser un angle proposé en deux également, comme BAC, sçavoir en décrivant de sa pointe A le demi-cercle DEF, & en tirant la droite EF, qui fera en F un angle égal à la moitié du proposé BAC, parce que l'angle A se fait au centre, & l'angle F à la circonference, & qu'ils s'appuyent sur le même arc de cercle DE. 31. Fig.

PRO-

Planche 3. 32. & 33. Fig.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XIX.

Les Angles qui sont dans un même Segment de cercle, sont égaux entre eux.

IL peut arriver deux cas, parce que les angles peuvent être dans un Segment plus grand qu'un Demicercle, ou bien dans un Segment plus petit qu'un Demi-cercle. Ils peuvent aussi être dans un Demi-cercle; mais ce troisiéme cas se démontrera comme le deuxiéme, c'est pourquoy nous ne parlerons que des deux premiers.

32. Fig. Je dis donc premierement que les deux angles D, C, qui sont dans le Segment ABCD plus grand qu'un demi-cercle, sont égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

En tirant du centre E, les deux rayons EA, EB, on connoîtra *par Prop.* 20. que chacun des deux angles à la circonference C, D, est égal à la moitié de l'angle au centre AEB, & que par consequent ces deux angles C, D, sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

33. Fig. Je dis en second lieu que les deux angles C, D, qui sont dans le Segment ABCD, plus petit qu'un demi-cercle, sont égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux angles CAD, CBD, sont dans le Segment CBAD plus grand qu'un demi-cercle, ils sont égaux entre eux par le cas precedent; & parce que les deux angles opposez au sommet AED, BEC, sont aussi égaux entre eux, *par* 15. 1. il s'ensuit *par* 32. 1. que les angles ACB, ADB, sont égaux entre eux. *Ce qui restoit à démontrer.*

Planche 3. 33. Fig.

USAGE.

Comme l'on prend pour principe dans l'Optique qu'une ligne paroît toûjours égale, quand elle est vûë sous des angles égaux, on connoît par cette Proposition, que la ligne AB doit paroître égale étant vûë des points C, D, ou de quelque autre point que ce soit de l'arc ADCB, puisqu'ainsi elle est toûjours vûë sous des angles égaux.

Cette Proposition sert aussi pour la suivante, & pour décrire un grand Cercle, dont on ne peut pas avoir le centre, ce qui est extrémement utile dans la description des grands Astrolabes, qui se font par les principes de la Projection Stereographique de la Sphere : & aussi pour donner la figure Spherique à des bassins de cuivre, sur lesquels on veut travailler & polir des verres de Lunette à longue vûë. Ce grand cercle se décrit mécaniquement en cette sorte.

Pour décrire par exemple une circonference de cercle par les trois points donnez A, B, C, on formera sur du fer, ou sur quelqu'autre matiere solide, un angle ACB égal à celuy que contient le Segment ABCD, & ayant mis dans les points A, B, deux pointes de fer bien fermes, on fera mouvoir le triangle ACB, dont les côtez CA, CB, doivent être suffisamment longs, en telle sorte que le côté CA touche la pointe A, & le côté CB la pointe B, & alors le point A décrira par ce mouvement la circonference ADCB.

Parce que l'Inverse de cette Proposition est aussi veritable, on s'en peut servir tres-utilement pour tirer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée inaccessible sur la terre, comme vous allez voir.

Pour tirer à la ligne donnée AB inaccessible sur la terre, par le point donné C, une parallele, mesurez avec un Graphometre ou autrement, l'angle ACB, & choisissez sur la terre le point D, en sorte que l'angle ADB soit égal au precedent ACB, afin que les quatre points A, C, D, B, soient dans une circonference de cercle. Aprés cela faites au point C, avec la ligne CB, l'angle BCE égal à l'angle ADC, par la ligne droite CE, qui sera parallele à la proposée AB, *par* 29. 1. parce que l'angle BCE est égal à son alterne ABC égal *par Prop.* 21. à l'angle ADC puisque chacun s'appuye sur le même arc AC, &c. 35. Fig.

Planche 3. 34. Fig.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XX.

Les deux angles opposez d'un Quadrilatere inscrit dans un Cercle, sont ensemble égaux à deux droits.

JE dis que les deux angles opposez BAD, BCD, du Quadrilatere ABCD inscrit dans un Cercle, sont ensemble égaux à deux droits, c'est à dire qu'ils sont égaux aux trois angles d'un triangle, sçavoir du triangle BCD, lesquels pris ensemble valent deux droits *par* 32. 1.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les deux diagonales AC, BD, on connoîtra *par Prop.* 21. que l'angle BDC, est égal à l'angle BAC, qui s'appuye sur le même arc BC, & que pareillement l'angle DBC est égal à l'angle DAC, qui s'appuye sur le même arc CD: d'où il suit que tout l'angle BAD est égal à la somme des deux BDC, DBC; c'est pourquoy en ajoûtant l'angle commun BCD, on connoîtra que la somme des deux angles opposez BAD, BCD, est égale à la somme des trois BDC, DBC, BCD, c'est à dire à deux droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Pour être convaincu plus facilement de la verité de ce Theorême, on considerera que puisque par *Prop.* 20. l'angle à la circonference n'est que la moitié de l'angle au centre, qui est mesuré par l'arc sur lequel ces deux angles s'appuyent, il s'ensuit que l'angle à la circonference BAD ne contient que la moitié des degrez de l'arc BCD, & que pareillement l'angle BCD ne contient que la moitié des degrez de l'arc BAD, & que par consequent ces deux angles BAD, BCD, ne contiennent ensemble, que la moitié du Cercle entier, ou de 360 degrez, c'est à dire qu'ils sont ensemble 180 degrez, ou deux droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer une partie des *Prop.* 31. & 32.

PRO-

PROPOSITION XXIII.

Planche 3. 36. Fig.

THEOREME XXI.

Deux semblables Segmens de cercle, décrits sur une même ligne droite, sont égaux entre eux.

JE dis que si les deux Segmens de cercle ABCA, ABDA, sont semblables, en sorte qu'ils comprennent les angles égaux ACB, ADB, ils seront égaux entre eux.

PREPARATION.

Appliquez par pensée le Segment ADB sur le Segment ACB, en le retournant vers C, autour de la base commune AB: & alors vous connoîtrez que ces deux Segmens ne se surpasseront pas, c'est à dire que la circonference ADB ne tombera pas ailleurs que sur la circonference ACB; & si l'on veut qu'elle aille en AEB, prolongez la ligne AC jusqu'en E, & joignez la droite BE.

DEMONSTRATION.

Puisque l'on veut que le Segment AEB soit le même que le Segment ADB, que l'on suppose égal au Segment ACB, il faut que le Segment AEB soit aussi égal au Segment ACB, & que par consequent l'angle E soit égal à l'angle ACB, *par Déf.* 8. ce qui étant impossible, parce que l'angle ACB, exterieur est plus grand que l'interieur opposé E, *par* 16. 1. il est impossible aussi que le Segment ADB tombe ailleurs que sur le Segment ACB. D'où il suit que les deux Segmens ACB, ADB, sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-

Planche 3. 37. Fig.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXII.

Deux semblables Segmens de Cercle, décrits sur deux lignes égales, sont égaux entre eux.

JE dis que si les deux bases AB, DE, des deux Segmens de cercle ABCA, DEFD, sont égales entre elles, & que ces deux Segmens soient semblables, en sorte qu'ils comprennent les angles égaux ACB, DFE; ces deux mêmes Segmens ABC, DEF, seront égaux entre eux.

PREPARATION.

Appliquez par pensée le Segment DEF sur le Segment ABC, en sorte que la base DE convienne avec la base AB; ce qui est possible, parce que ces deux bases sont supposées égales: & alors vous connoîtrez que ces deux Segmens ne se surpasseront pas, c'est à dire qu'ils conviendront ensemble: & si l'on veut que le Segment DEF occupe l'espace AGB, prolongez la ligne BC jusqu'en G, & joignez la droite AG.

DEMONSTRATION.

Puisque l'on veut que le Segment AGB soit le même que le Segment AEF, que l'on suppose égal au Segment ACB, il faut que le Segment AGB soit aussi égal au Segment ACB, & que par consequent l'angle G soit égal à l'angle ACB, *par Déf.* 8. ce qui étant impossible, parce que l'angle exterieur ACB est plus grand que l'interieur opposé G, *par* 16. 1. il est impossible aussi que le Segment DEF tombe ailleurs que sur le Segment ACB. D'où il suit que les deux Segmens ABC, DEF, sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

38. Fig. On se sert de cette Proposition pour reduire un triangle isoscéle mixte, dont les deux côtez égaux sont deux arcs de cercles égaux en un triangle isoscéle rectiligne: comme si le triangle proposé est ADCEB, dont les deux côtez ADC, BEC, sont deux arcs égaux de cercles égaux, on tirera les droites AC, BC, lesquelles avec la base AB, feront le triangle isoscéle rectiligne ABC, égal au proposé ADCEB, à cause des deux Segmens de cercle égaux ACD, BCE, &c.

PRO-

PROPOSITION XXV.

Planche 31. 39. Fig.

PROBLÈME III.

Un Segment de cercle étant donné, trouver le centre de ce cercle.

POur trouver le centre du cercle, dont ABC est un Segment, choisissez à volonté trois points sur la circonference ABC, comme A, B, C, & joignez les droites AB, BC, & les ayant divisées en deux également aux points D, E, tirez-leur les deux perpendiculaires DF, EF, & le point F de leur section sera le centre qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Parce que *par Prop.* 1. le centre du Cercle, dont la circonference passe par les trois points A, B, C, est dans chacune des deux perpendiculaires DF, EF, il doit être dans leur commune section F, où par consequent se trouve le centre du cercle, dont ABC est une portion. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition est le fondement de la pratique que nous avons enseignée pour resoudre le *Probl.* 22. *Introd.* & elle sert aussi pour *faire passer une circonference de cercle par les trois angles d'un triangle donné*, comme il sera enseigné dans la *Prop.* 5. 4.

Planche 3. 40. Fig.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XXIII.

Aux Cercles égaux, les angles égaux au centre, ou à la circonference, s'appuyent sur des arcs égaux.

JE suppose que les cercles ABD, EFH, sont égaux, en sorte que les rayons CA, GE, soient égaux entre eux. Cela étant, je dis premierement que si les angles au centre ACB, EGF, sont égaux entre eux, les arcs AB, EF, sur lesquels ils s'appuyent sont pareillement égaux entre eux, parce qu'ils en sont les mesures.

Je dis en second lieu, que si les angles à la circonference D, H, sont égaux entre eux, les arcs AB, EF, sur lesquels ils s'appuyent, sont aussi égaux entre eux, parce que par *Prop.* 20. ces angles D, H, sont les moitiez des angles au centre C, G, qui seront aussi égaux entre eux, & auront par consequent leurs mesures égales AB, EF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXIV.

Les angles au centre ou à la circonference des cercles égaux, sont égaux entre eux, quand ils s'appuyent sur des arcs égaux.

40. Fig. JE suppose que les Cercles ABD, EFH, sont égaux, en sorte que les rayons CA, GE, soient égaux entre eux, & que les arcs AB, EF, sont pareillement égaux. Cela étant, je dis premierement que les angles au centre C, G, sont égaux entre eux, parce que leurs mesures AB, EF, sont supposées égales.

Je dis en second lieu, que les angles à la circonference D, H, sont égaux entre eux, parce que par *Prop.* 20. ils sont les moitiez des angles au centre C, G, qui ont esté démontrez égaux.

PRO-

PROPOSITION XXVIII.

Planche 4. 41. Fig.

THEOREME XXV.

Les lignes égales dans les cercles égaux, répondent à des arcs égaux.

JE suppose que les cercles ABC, DEF, sont égaux; en sorte que leurs rayons AG, DH, soient égaux entre eux, & que les lignes AB, DE, sont pareillement égales; cela étant, je dis, que les arcs AIB, DKE, sont égaux entre eux, parce qu'ils sont les mesures des deux angles au centre G, H, lesquels *par* 8. 1. sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXVI.

Les lignes droites qui soûtiennent des arcs égaux dans les cercles égaux, sont égales entre elles.

JE suppose que les cercles ABC, DEF, sont égaux, 41. Fig.
en sorte que leurs rayons AG, DH, soient égaux entre eux, & que les arcs AIB, DKE, sont pareillement égaux; cela étant, je dis, que les lignes AB, DE, sont égales entre elles, parce que les arcs AIB, DKE, étant supposez égaux, les angles au centre G, H, qu'ils mesurent sont aussi égaux, & que *par* 4. 1. les triangles isoscéles ABG, DEH, sont égaux entre eux, & leurs bases AB, DE, par consequent égales entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 4. 42. Fig.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME IV.

Diviser un arc de cercle donné en deux également.

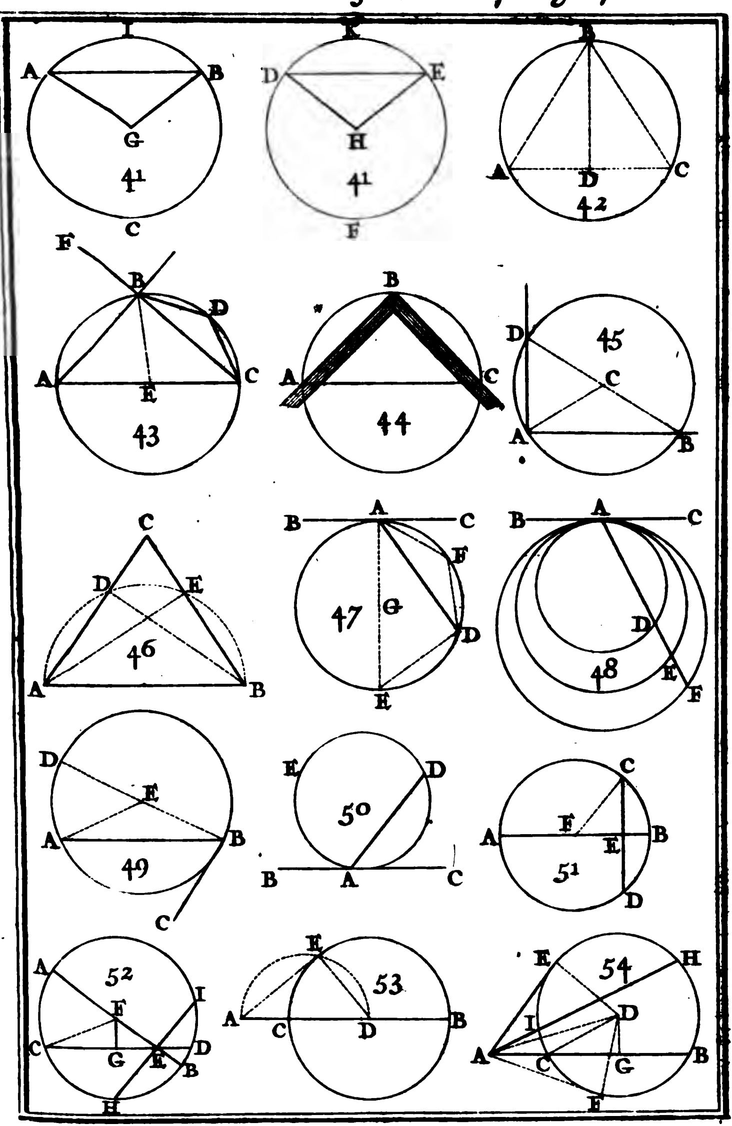
POur diviser en deux également l'arc de cercle ABC, joignez ses deux extrémitez A, C, par la droite AC, & l'ayant divisée en deux également au point D, tirez luy par son point de milieu D, la perpendiculaire BD, qui divisera en deux également au point B, l'arc proposé ABC, de sorte que les deux arcs AB, BC, seront égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

En tirant les droites AB, BC, on connoîtra *par* 4. 1. qu'elles sont égales entre elles, à cause de l'égalité des deux triangles rectangles égaux ADB, CDB. D'où il suit *par Prop.* 28. que les deux arcs AB, BC, sont aussi égaux entre eux. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour diviser un angle en deux également, & aussi pour diviser la circonference entiere d'un Cercle en 32 parties égales, pour les 32 Vents, que l'on a accoûtumé de mettre dans la Boussole. Elle sert aussi à la division du Cercle en ses 360 degrez, mais ce n'est qu'en partie, parce qu'il faut encore sçavoir diviser un arc de cercle au moins en trois parties égales, ce qui ne se peut pas faire par la Geometrie d'Euclide, parce que ce Problême est solide: neanmoins dans la pratique on se contente de faire cette division en tâtonnant, ce qui suffit pour venir à bout de ce que l'on se propose de faire.


41
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54

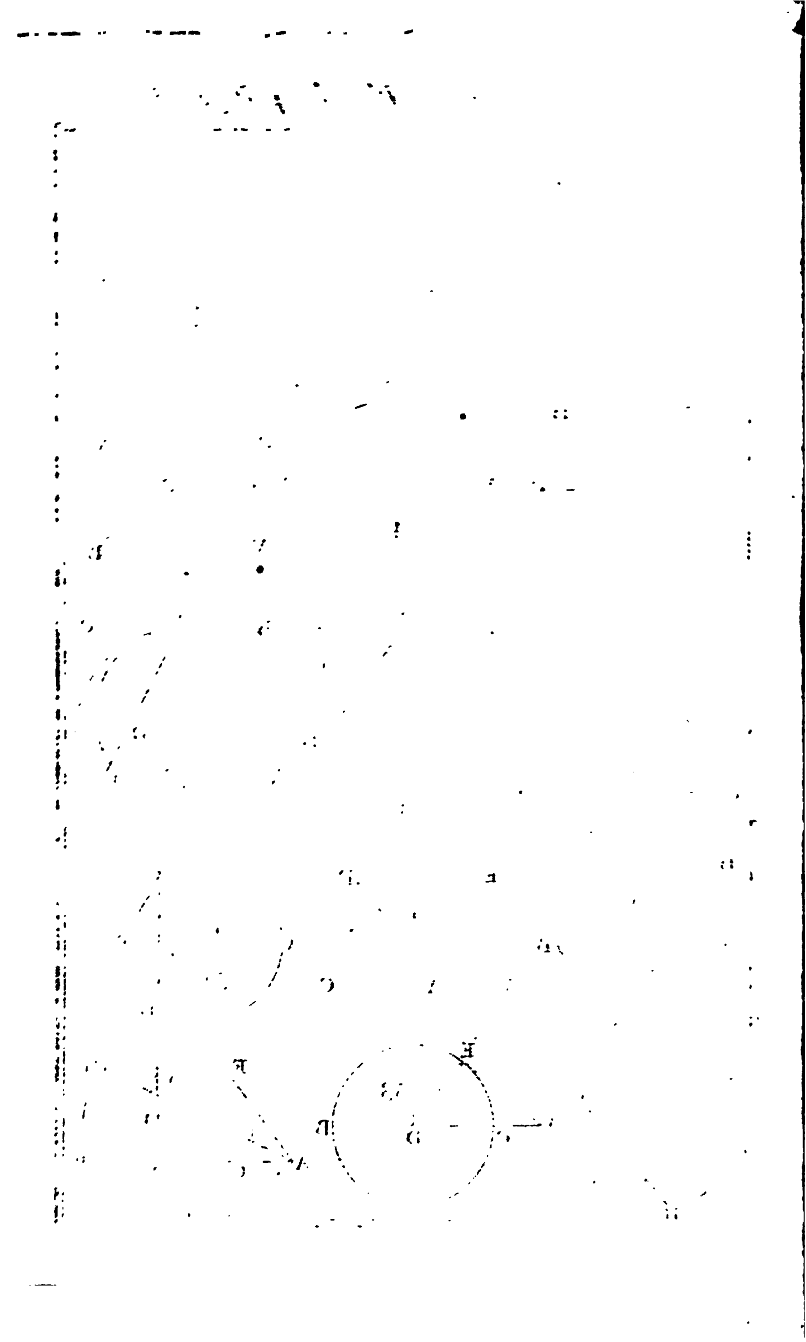


Planche 4.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXVII.

Au Cercle, l'angle qui est au Demi-cercle est droit : celuy qui est compris dans un plus grand segment, est aigu : & celuy qui est compris dans un plus petit segment, est obtus.

JE dis premierement, que l'angle ABC, qui est dans le Demi-cercle ABDC, est droit, de sorte que si l'on prolonge l'une des deux lignes BA, BC, comme BC vers E, les angles ABE, ABC, seront égaux entre eux, & par consequent droits. 43. Fig.

DEMONSTRATION.

En tirant le rayon BE, on connoîtra *par* 5. 1. que dans le triangle isoscéle AEB, l'angle ABE est égal à l'angle BAE, & que pareillement dans le triangle isoscéle BEC, l'angle EBC est égal à l'angle BCE. D'où il suit que tout l'angle ABC est égal à la somme des deux BAC, BCE, c'est à dire *par* 32. 1. à l'angle exterieur ABE, & que par consequent chacun de ces deux angles ABC, ABE est droit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que l'angle BAC, qui est dans le Segment BAC plus grand qu'un Demi-cercle, est aigu, ou plus petit qu'un droit.

DEMONSTRATION.

Puisque le triangle ABC est rectangle en B, comme il a esté démontré, il s'ensuit *par* 32. 1. que chacun des deux autres angles est aigu, & qu'ainsi l'angle BAC est plus petit qu'un droit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Enfin, je dis que l'angle D, qui est dans le segment BCD plus petit qu'un demi-cercle, est obtus, ou plus grand qu'un droit.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux angles opposez A, D, du Quadrilatere ABDC, sont ensemble égaux à deux droits, *par Prop.* 22. & que l'angle A a esté démontré aigu, l'angle D sera obtus. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Planche 4. 44. Fig.

Cette Proposition sert pour connoître quand une Equierre est juste, car si l'on décrit le demi-cercle ABC, & qu'on applique l'angle droit de l'Equierre en quelque point de la circonference de ce Demi-cercle, comme en B, en sorte que l'une des branches, comme AB soit sur l'extremité A du Diametre AC, l'autre branche BC doit répondre sur l'autre extremité C, si l'Equierre est bien faite.

45. Fig. On se sert aussi tres-utilement de cette Proposition, pour tirer par un point donné sur une ligne donnée une perpendiculaire : comme si par le point A de la ligne donnée AB, il faut tirer une perpendiculaire, on décrira par ce point donné A, du point C, pris à discretion hors la ligne donnée AB, une circonference de cercle, & par le point B, où elle coupe la ligne AB, on tirera au centre C, le Diametre BCD, pour avoir le point D, par lequel & par le point donné A, on tirera la droite AD, qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB, c'est à dire que l'angle BAD sera droit, parce qu'il est dans un Demi-cercle.

46. Fig. Cette Proposition sert aussi pour tirer de l'un des trois angles d'un triangle une perpendiculaire au côté opposé, & même pour en tirer deux à la fois : comme si des deux angles A, B, du triangle ABC, on veut tirer une perpendiculaire sur chacun des côtez opposez BC, AC, on décrira autour du troisiéme côté AB, le Demi-cercle ADEB, & par les points E, D, où la circonference coupe les côtez AC, BC, on tirera aux deux angles proposez A, B, les droits AE, BD, qui seront perpendiculaires aux côtez BC, AC, par la proprieté du Demi-cercle.

53. Fig. Je n'aurois jamais fait, si je voulois rapporter icy tous les differens usages de cette Proposition ; c'est pourquoy je me contenteray de dire qu'elle sert dans la Trigonometrie, pour la supputation de la Table des Sinus: dans l'Arithmetique par Geometrie, pour la soustraction des figures semblables : & aussi pour la démonstration de la Proposition suivante : & de plus elle nous fournit une methode plus facile que celle de la *Prop.* 17. pour tirer une touchante par un point donné hors de la circonference d'un Cercle donné. Comme si du point donné A, l'on veut tirer une ligne droite, qui touche la circonference du cercle donné CEB, dont le centre est D ; on tirera de ce centre D, au point donné A, la droite AD, autour de laquelle on décrira le Demi cercle AED, qui coupe icy la circonference du cercle donné au point E, par lequel & par le point donné A, on tirera la droite AE, qui sera la touchante qu'on cherche *par Prop.* 16. parce que l'angle AED étant dans un Demi-cercle est droit.

PRO-

PROPOSITION XXXII.

Planche 4. 47. Fig.

THEOREME XXVIII.

La ligne droite, qui coupe la circonference d'un Cercle au point d'attouchement, fait avec la Touchante des angles égaux à ceux des Segmens alternes.

ON appelle *Segment alterne* celuy qui est de l'autre part de l'angle rectiligne, qui se fait au point d'attouchement, comme ADEA, à l'égard de l'angle opposé CAD, qui se fait de la ligne AD, au point d'attouchement A, avec la touchante AC : ou bien le Segment ADFA, à l'égard de l'angle opposé BAD, qui se fait de la même ligne AD, avec la touchante AB, au même point d'attouchement A.

Cela étant supposé, je dis premierement que l'angle CAD est égal à l'angle qui se fait au Segment alterne ADEA, comme par exemple à l'angle AED, qui se fait de la ligne ED, avec le Diametre AE.

DEMONSTRATION.

Parce que l'angle ADE est droit, *par Prop.* 31. les deux autres angles AED, EAD, du triangle ADE, sont ensemble égaux à un droit, *par* 32. 1. & par consequent égaux à l'angle CAE, qui est aussi droit *par Prop.* 16. c'est pourquoy en ôtant l'angle commun EAD, on connoîtra que le seul angle AED est égal à l'angle CAD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si par le point F pris à discretion sur l'arc AFD, on tire les droites AF, DF, l'angle BAD est égal à l'angle AFD, qui se fait dans le Segment alterne ADFA.

DEMONSTRATION.

Parce que du Quadrilatere AEDF, la somme des deux angles opposez E, F, est égale à deux droits, *par Prop.* 22. & par consequent égale à la somme des deux BAD, CAD, qui vaut aussi deux droits, *par Prop.* 13. 1. en ôtant les angles AED, CAD, qui ont été démontrez égaux, on connoîtra que le seul angle BAD est égal au seul angle F. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 4.

SCOLIE.

47. Fig. Nous avons supposé dans ces deux démonstrations, que la la ligne AD étoit hors du centre G : car si elle passoit par le centre G, comme AE, elle feroit avec la touchante CD deux angles droits *par Prop.* 18. & les angles des demi cercles seroient aussi droits, *par Prop.* 31. Ainsi la Proposition seroit évidente.

USAGE.

48. Fig. Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 33. & 34. & de la *Prop.* 10. 4. & aussi pour démontrer que si plusieurs cercles se touchent en un même point, comme A, par lequel il passe une ligne quelconque qui coupe leurs circonferences, comme AF, les arcs de chaque cercle terminez par cette ligne, sçavoir AD, AE, AF, sont des semblables parties de leurs circonferences, parce que tous les angles qui se feront dans les Segmens alternes seront égaux entre eux, chacun étant égal à l'angle que fait la ligne droite AF avec la touchante BC.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME V.

Décrire sur une ligne droite donnée un Segment de cercle, capable d'un angle donné.

49. Fig. IL est évident *par Prop.* 31. que si l'angle donné est droit, il n'y a qu'à faire sur la ligne donnée AB un Demi-cercle, qui sera un Segment de cercle, capable de cet angle. Mais si l'angle donné n'est pas droit, on fera à l'extremité B de la ligne donnée AB, l'angle ABC égal au donné par la ligne droite BC, à laquelle on tirera par le point B, la perpendiculaire BD. Aprés cela on fera à l'autre extremité A l'angle BAE, égal à l'angle ABE, ce qui rendra égaux les deux côtez AE, BE, du triangle ABE, *par* 6. 1. C'est pourquoy on pourra décrire du point E, comme centre, par les deux extremitez A, B, une circonference de cercle, & le Segment ABDA sera capable de l'angle donné, ou de son égal ABC.

Planche 4. 49. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne BC est perpendiculaire au diametre BD, *par constr.* il s'ensuit *par Prop.* 18. qu'elle touche le cercle au point B, & *par Prop.* 32. que le Segment ABDA est capable d'un angle égal à l'angle ABC, qui a été fait égal au donné. *Ce qu'il fallait faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour trouver un point, duquel on puisse voir égales les deux parties inégales d'une ligne coupée en deux, sçavoir en faisant sur l'une des deux lignes données un Segment de cercle tel que l'on voudra, & sur l'autre un Segment de cercle, semblable au precedent : car le point où les circonferences de ces deux Segmens se couperont, sera celuy duquel les deux lignes proposées étant vûës sous des angles égaux, paroîtront égales.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME VI.

Retrancher d'un Cercle donné un Segment de cercle, capable d'un angle donné.

Il est évident *par Prop.* 31. que si l'angle donné est droit, il n'y a qu'à tirer dans le Cercle donné un Diametre quelconque, qui retranchera de part & d'autre un Demi-cercle capable de l'angle droit. Mais si l'angle donné n'est pas droit, on tirera *par Prop.* 16. 50. Fig. au point A, pris à discretion sur la circonference du cercle donné la touchante BC, avec laquelle on fera au même point A, l'angle CAD, égal au donné, par la droite AD, qui retranchera du cercle donné le Segment ADEA capable de l'angle CAD, & par consequent de l'angle donné, comme il est évident *par Prop.* 32.

PRO-

Planche 4. 51. Fig.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXIX.

Si deux lignes droites se coupent dans un cercle, le Rectangle compris sous les deux parties de l'une est égal au Rectangle compris sous les parties de l'autre.

LEs deux lignes se peuvent couper diversement, car elles se peuvent couper au centre, auquel cas leurs parties seront égales : ou bien l'une peut passer par le centre, & couper également l'autre qui n'y passe pas, auquel cas ces deux lignes seront perpendiculaires entre elles *par Prop.* 3. ou bien encore l'une peut passer par le centre, & couper inégalement l'autre qui n'y passe pas : ou bien enfin les deux lignes se peuvent couper hors du centre. Je dis que dans tous ces cas le Rectangle compris sous les deux parties de l'une est égal au Rectangle compris sous les deux parties de l'autre.

Démonstration du premier cas.

Il est évident que si les deux lignes s'entrecoupent au centre, leurs parties seront égales entre elles, comme étant égales chacune au rayon du Cercle, & qu'ainsi leurs Rectangles seront égaux entr'eux, parce qu'ils seront les quarrez du même rayon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Démonstration du second cas.

51. Fig. Si l'une des deux lignes, comme AB, passe par le centre F du Cercle, & qu'elle coupe l'autre ligne CD à angles droits & en deux également du point E, hors du centre, on connoîtra *par* 5. 2. que les Rectangles sous les parties AE, BE, avec le quarré de la partie d'entre-deux EF, est égal au quarré FB, ou FC, ou *par* 47. 1. aux deux quarrez EF, FC; c'est pourquoy en ôtant le quarré commun EF, on connoîtra que le seul Rectangle sous les parties AE, BE, est égal au seul quarré EC, c'est à dire au Rectangle sous les parties EC, ED. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Démonstration du troisiéme cas.

52. Fig. Si l'une des deux lignes AB, CD, qui s'entrecoupent au

au point E hors du centre, comme AB, passe par le centre F du cercle, sans être perpendiculaire à l'autre CD, en tirant à cette autre CD, du centre F la perpendiculaire CG, qui la divisera en deux également au point G, *par Prop.* 3. & en tirant le rayon FC, on connoîtra *par* 5. 2. que le Rectangle sous les parties CE, DE, avec le quarré de la partie d'entre-deux EG, est égal au quarré de la moitié CG : c'est pourquoy en ajoûtant le quarré FG, on connoîtra que le Rectangle sous les lignes CE, DE, avec la somme des quarrez FG, EG, ou *par* 47. 1. avec le seul quarré FE, est égal aux quarrez CG, FG, ou *par* 47. 1. au seul quarré FC, ou FB, ou *par* 5. 2. au Rectangle sous les lignes AE, BE, & au quarré de la partie d'entre-deux FE, lequel étant ôté de chaque côté, il restera le seul Rectangle sous les parties CE, DE, égal au seul Rectangle sous les parties AE, BE. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 4. 52. Fig.

Démonstration du quatriéme cas.

Enfin si aucune des deux lignes CD, HI, qui se coupent au point E hors du centre, ne passe par le centre F, on démontrera aisément que le Rectangle sous les parties CE, DE, est égal au Rectangle sous les parties EH, EI, parce qu'en tirant par le point E de section, le diametre AB, on connoîtra par le cas precedent, que chacun de ces deux Rectangles est égal au Rectangle sous les parties AE, BE, & que par consequent ils sont égaux entre eux. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer plusieurs Theorêmes dans la Trigonometrie, & aussi pour trouver entre deux lignes données une moyenne proportionnelle : comme pour trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes données AE, BE, qui doivent être placées en ligne droite, on décrira autour de leur somme AB, le demi-cercle ABC, & on élevera du point E, sur AB, la perpendiculaire EC, qui sera la moyenne proportionnelle qu'on cherche, comme il sera démontré dans la *Prop.* 13. 6. On peut aussi à deux lignes données trouver une troisiéme proportionnelle, ou à trois une quatriéme, &c. 51. Fig.

PRO-

Planche 4. 53. Fig.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXX.

Si d'un point pris comme l'on voudra hors d'un cercle, on tire une ligne droite, qui touche sa circonference, & une autre qui la coupe en dedans & en dehors; le quarré de la touchante sera égal au Rectangle sous toute la coupante & sa partie exterieure.

JE dis premierement que le quarré de la touchante AE, est égal au Rectangle sous toute la coupante AB, qui passe par le centre D, & sa partie exterieure AC.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire du centre D par le point d'attouchement E, le rayon DE, on connoîtra *par Prop.* 18. que le triangle ADE est rectangle en E, & *par* 6. 2. que le Rectangle sous les lignes AB, AC, avec le quarré CD, ou DE, est égal au quarré de la ligne AD, c'est à dire *par* 47. 1. aux deux quarrez AE, DE: c'est pourquoy en ôtant le quarré commun DE, on connoîtra que le seul Rectangle des lignes AB, AC, est égal au seul quarré DE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

54. Fig. Je dis en second lieu, que le quarré de la touchante AE, est égal au Rectangle sous toute la ligne AB, qui ne passe pas par le centre D, & sa partie exterieure AC.

PREPARATION.

Tirez comme auparavant, le rayon DE, qui sera perpendiculaire à la touchante AE, *par Prop.* 18. Tirez encore le rayon DG, & du centre D sur la ligne AB, la perpendiculaire DG, qui divisera la partie BC en deux également au point G. Enfin joignez la droite AD.

DEMONSTRATION.

Parce que le Rectangle sous les lignes AB, AC, avec le quarré CG, est égal au quarré AG, *par* 6. 2. en ajoûtant de chaque côté le quarré DG, on connoîtra que le Rectangle des lignes AB, AC, avec la somme des

des deux quarrez CG, DG, c'est à dire *par* 47. 1. avec le seul quarré CD, ou DE, est égal à la somme des quarrez AG, DG, ou *par* 47. 1. au seul quarré AD, ou aux deux quarrez AE, DE; c'est pourquoy en ôtant le quarré commun DE, on connoîtra que le seul Rectangle des lignes AB, AC, est égal au seul quarré AE. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 4. 54. Fig.

COROLLAIRE I.

Il suit de cette Proposition, que si du même point A, on tire quelqu'autre ligne droite, comme AH, le Rectangle sous cette ligne AH, & sa partie AI, est égal au Rectangle sous toute la ligne AB, & sa partie exterieure AC, parce que chacun de ces Rectangles est égal à un même quarré, sçavoir au quarré de la touchante AE.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi que si du même point A, on tire une autre touchante AF, cette touchante AF sera égale à la premiere AE, parce que le quarré de chacune est égal au Rectangle sous les lignes AB, AC, ou bien au Rectangle sous les lignes AH, AI.

USAGE.

Nous nous servirons de cette Proposition dans la Trigonometrie, pour trouver autrement & plus facilement que par *Prop.* 13. 2. les Segmens de la base d'un triangle, faits par la perpendiculaire, qui tombe de l'angle opposé sur cette base, ce qui sert pour trouver l'aire du triangle, comme vous avez vû, & aussi pour en connoître les angles, comme vous verrez dans la Trigonometrie. Cette Proposition sert aussi pour la démonstration de la suivante, qui est son inverse. Planche 5. 54. Fig.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXXI.

Si le Rectangle compris sous la coupante & sa partie exterieure, est égal au quarré d'une ligne droite qui rencontre la circonference d'un cercle, cette ligne droite touchera la circonference.

JE dis que si le Rectangle sous la coupante AB, & sa partie exterieure AC, est égal au quarré de la ligne AE, qui rencontre en E la circonference du 54. Fig.

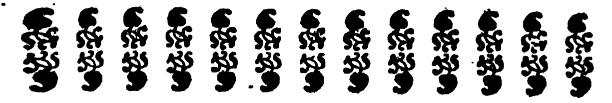
Planche 4. 54. Fig. du cercle EFH dont le centre est D, cette ligne droite AE touche la circonference du cercle au même point E.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire la droite AD, la touchante AF, & les rayons DE, DF, on connoîtra *par Prop.* 36. que le quarré de la touchante AF est égal au Rectangle des lignes AB, AC: & comme l'on suppose que le quarré AE est aussi égal au même Rectangle, il s'ensuit que les lignes AE, AF, sont égales entre elles, & *par* 8. 1. que l'angle E est égal à l'angle F, lequel étant droit *par Prop.* 18. l'angle E sera aussi droit, & *par Prop.* 16. la ligne AE touchera la circonference du cercle au point E. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 10. 4. & aussi pour démontrer que d'un même point pris à discretion hors d'un cercle, on ne peut tirer que deux touchantes, parce que comme nous avons reconnu tant dans cette Proposition, que dans la precedénte, que les deux touchantes AE, AF, sont égales entre elles, si l'on pouvoit tirer une troisiéme touchante, comme AI, cette troisiéme touchante AI seroit pareillement égale à chacune des deux precedentes AE, AF, & ainsi on pourroit tirer d'un même point plus de deux lignes égales jusqu'à la circonference convexe d'un cercle, ce qui est contre la *Prop.* 8. Il y a d'autres Usages moins considerables, que nous omettons, pour venir plûtôt au Livre suivant.



LIVRE IV. DES ELEMENS D'EUCLIDE.

APrés avoir expliqué les principales proprietez du Cercle, Euclide donne icy plusieurs Problêmes, pour y inscrire & circonscrire des figures regulieres, ce qui est d'une tres-grande utilité dans la Fortification pour les Places regulieres, & dans la Trigonometrie pour la supputation de la Table des Sinus, & même dans la Geometrie pour la Quadrature du Cercle, dont on approche aussi prés que l'on en peut avoir besoin par les Polygones inscrits & circonscrits, & encore dans l'Astrologie, pour expliquer les differens aspects des Planetes, qui prennent les noms des Polygones, qui déterminent leurs distances, par rapport à la partie que cette distance est de toute la circonference du grand Cercle, qui passe par les centres de ces Planetes.

DEFINITIONS.

I.

Une Figure rectiligne est dite *inscrite dans une autre Figure rectiligne*, lorsque le sommet de chacun de ses angles touche un des côtez de la Figure dans laquelle elle est inscrite. *Ainsi on connoît que la Figure EFGH est inscrite dans la Figure ABCD.* 1 Fig.

II.

On dit qu'*une Figure rectiligne est circonscrite à une autre Figure rectiligne*, lorsque chacun de ses côtez passe par le sommet d'un des angles de la Figure à laquelle elle est circonscrite. *Ainsi on connoît que la Figure ABCD est circonscrite à la Figure EFGH.*

Ces

1. Fig. Ces deux premieres Définitions sont inutiles pour ce que nous avons à dire dans la suite, parce que ce Livre ne traite que des Figures rectilignes inscrites ou circonscrites au Cercle. Neanmoins comme les Commentateurs d'Euclide ne les ont pas negligées, & qu'elles peuvent servir en d'autres rencontres, nous n'avons pas voulu les omettre.

III.

On dit qu'*une Figure rectiligne est inscrite au Cercle*, quand le sommet de chacun de ses angles touche la
3. Fig. circonference du Cercle, auquel elle est inscrite. *Ainsi on connoît que le triangle ABC est inscrit dans le Cercle ABFEC, mais non pas le triangle DEF, parce que le sommet de l'angle EDF ne touche pas la circonference.*

IV.

On dit qu'*une Figure rectiligne est circonscrite à un Cercle*, quand chacun de ses côtez touche la circonference
5. Fig. du Cercle, auquel elle est circonscrite. *Ainsi on connoît que le triangle ABC est circonscrit au Cercle EFG, parce que ses côtez touchent sa circonference aux points E, F, G.*

V.

On dit qu'*un Cercle est inscrit dans une Figure rectiligne*, lorsque sa circonference touche chacun des côtez de la
5. Fig. Figure dans laquelle il est inscrit. *Ainsi on connoît que le Cercle DEF est inscrit au triangle IKL, parce que sa circonference touche ses côtez aux points D, E, F.*

VI.

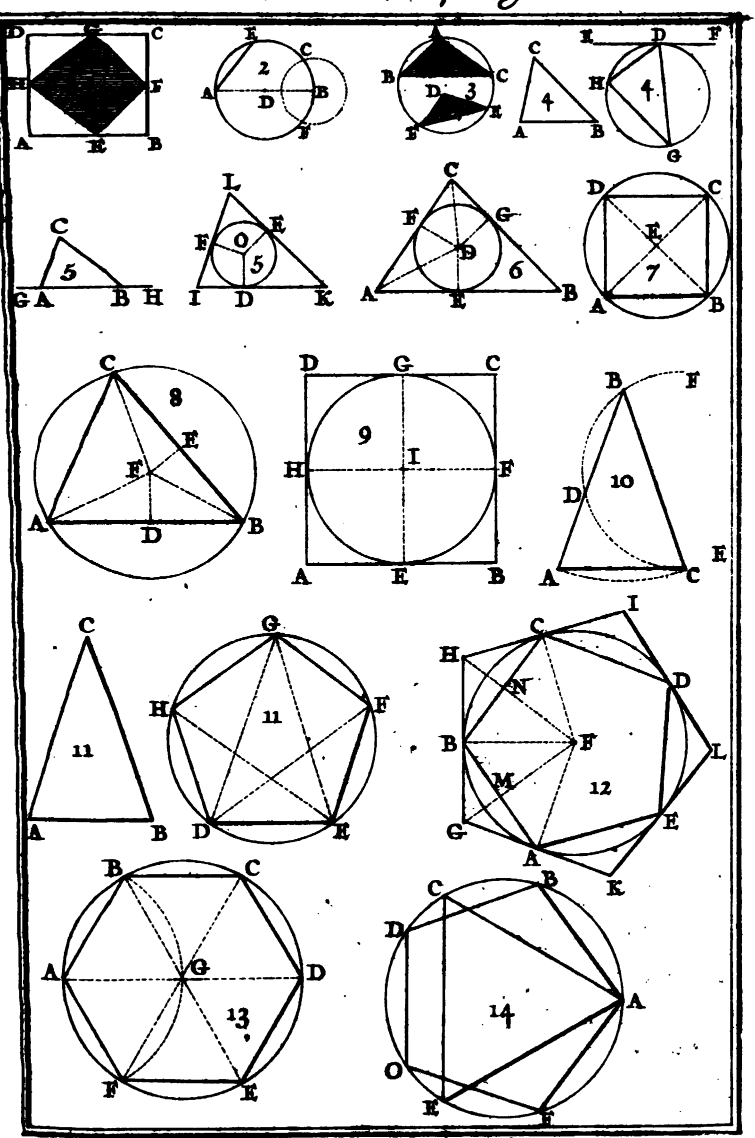
On dit qu'*un Cercle est circonscrit à une Figure rectiligne*, lorsque sa circonference passe par le sommet de chaque angle de la Figure à laquelle il est circonscrit.
3. Fig. *Ainsi on connoît que le Cercle ABFEC est circonscrit au triangle ABC, parce que sa circonference passe par les sommets A, B, C, de ce triangle.*

VII.

2. Fig. La *ligne droite appliquée à un Cercle*, est celle dont les deux extremitez touchent la circonference du Cercle auquel elle est appliquée: *comme AE.*

PRO-

Elem. d'Eucl. Liv. 4. Page 160.



PROPOSITION I.

PROBLEME I.

Appliquer à un Cercle donné une ligne droite, qui ne soit pas plus grande que son Diametre.

POur appliquer au Cercle donné AECB, une ligne droite qui ne soit pas plus grande que son Diametre AB, marquez sur ce diametre la longueur de cette ligne droite, comme BD, & décrivez du point B par le point D, une circonference de cercle, qui coupe icy la circonference du Cercle donné aux deux points C,F. Enfin tirez par l'un de ces deux points F, C, comme C, au point B, la droite BC, qui sera égale à la ligne donnée BD, *par Déf. du Cercle*. Ainsi le Problême sera resolu. 2. Fig.

USAGE.

Cette Proposition est necessaire pour la pratique de celles qui suivent, & elle suppose que la ligne droite donnée n'est pas plus grande que le Diametre du Cercle donné, parce qu'il a été démontré dans la *Prop.* 15. 3. que la plus grande de toutes les lignes droites que l'on peut tirer dans un Cercle, est celle qui passe par le centre, c'est à dire que c'est le Diametre.

PROPOSITION II.

PROBLEME II.

Inscrire dans un Cercle donné un triangle équiangle à un triangle donné.

POur inscrire dans le Cercle donné DGH, un triangle équiangle au triangle donné ABC, tirez par le point D pris à discretion sur la circonference, la touchante EF, & faites avec cette touchante EF, au point d'attouchement E, d'un côté l'angle FDG égal à l'angle A, & de l'autre côté l'angle EDH égal à l'angle B. Enfin joignez la droite GH, & le triangle DGH sera équiangle au donné ABC, de sorte que l'angle G sera égal à l'angle B, & l'angle H à l'angle A. 4. Fig.

4. Fig. DEMONSTRATION.

Parce que *par* 32. 3. l'angle FDG, ou A est égal à l'angle H du Segment alterne DHGD, & que pareillement l'angle EDH, ou B est égal à l'angle G du Segment alterne GDHG, il s'ensuit *par* 32. 1. que le troisiéme angle GDH est égal au troisiéme angle C, & qu'ainsi le triangle GGH est équiangle au triangle donné ABC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour inscrire dans un Cercle donné un Pentagone regulier, comme vous verrez dans la *Prop.* 11. & aussi un Pentedecagone regulier, comme il sera enseigné dans la *Prop.* 16.

PROPOSITION III.

PROBLEME III.

Décrire autour d'un Cercle donné un triangle équiangle à un triangle donné.

5. Fig. POur décrire autour du Cercle donné DEF, dont le centre est O, un triangle équiangle au donné ABC, tirez un rayon quelconque OD, & ayant prolongé la base AB du triangle donné ABC, vers G, & H, faites au centre O, avec le rayon OD, d'un côté l'angle DOE égal à l'angle exterieur CBH, & de l'autre côté l'angle DOF égal à l'autre angle exterieur CGA. Enfin tirez par les trois points E, F, G, les touchantes IK, KL, LI, qui feront le triangle IKL équiangle au proposé ABC, & circonscrit au Cercle donné DEF.

DEMONSTRATION.

Puisque les trois côtez du triangle IKL touchent le Cercle DEF, *par constr.* il est évident *par Déf.* 4. que le triangle IKL est circonscrit, & *par* 16. 3 que les trois angles D, E, F, sont droits: & parce que *par* 32.1. les quatre angles du Trapeze KDOE, sont ensemble égaux à quatre droits, & que les deux E, D, sont droits, il s'ensuit que les deux autres DOE, & K, sont ensemble égaux à deux droits, & par consequent aux

deux

deux HBC, ABC, qui valent aussi deux droits, *par* 5. Fig. 13. 1. & parce que l'angle DOE est égal à l'angle HBC, *par constr.* il est de necessité que l'angle K soit égal à l'angle ABC. On démontrera de la même façon que l'angle I est égal à l'angle BAC. D'où il est aisé de conclure *par* 32. 1. que le triangle IKL est équiangle au triangle ABC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROPOSITION IV.

PROBLEME IV.

Inscrire un Cercle dans un Triangle donné.

POur inscrire un Cercle dans le triangle donné ABC, 6. Fig. divisez deux de ses angles, comme A & C, en deux également par les droites AD, CD, & du point D, où elles se coupent tirez sur les trois côtez du triangle proposé ABC, les perpendiculaires DE, DF, DG lesquelles seront égales entre elles, de sorte que le cercle décrit du centre D par le point E, passera par les points F, G.

DEMONSTRATION.

Parce que les angles E, F, sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont droits, *par constr.* & que la ligne AD, divise l'angle BAC en deux également, les deux triangles ADE, ADF, seront égaux entre eux, *par* 26. 1. & le côté DE sera égal au côté DF. On démontrera de la même façon que les deux triangles rectangles CDF, CDG, sont égaux entre eux, & que par consequent le côté DF est égal au côté DG. D'où il suit que les trois perpendiculaires DE, DF, DG, sont égales entre elles, & qu'ainsi on peut décrire un Cercle du centre D, par les trois points E, F, G; & puisque les angles qui se font à ces trois points E, F, G, sont droits, les côtez du triangle ABC, toucheront la circonference de cercle, lequel par consequent sera inscrit dans le triangle. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer que les trois lignes droites, qui divisent en deux également les angles d'un triangle, se rencontrent en un même point au dedans du triangle, parce que le centre du Cercle inscriptible est dans chacune.

PROPOSITION V.

PROBLEME V.

Décrire un Cercle autour d'un Triangle donné.

8. Fig. POur décrire un cercle autour du triangle donné ABC, divisez en deux également deux de ses côtez, comme AB, BC, aux points D, E, par où vous leur tirerez les perpendiculaires DF, EF, & le point F, où elles se coupent sera le centre du cercle qu'on cherche, de sorte que les trois lignes FA, FB, FC, seront égales entre elles.

DEMONSTRATION.

On connoîtra *par* 4. 1. que les deux triangles rectangles ADF, BDF, sont égaux entre eux, & que par consequent les deux lignes AF, BF, sont égales entre elles. On connoîtra de la même façon que les deux lignes BF, CF, sont aussi égales entre elles. D'où il suit que les trois lignes AF, BF, CF, sont égales entre elles, & qu'ainsi on peut décrire du point F, comme centre, un cercle, dont la circonference passera par les trois points A, B, C, lequel par consequent sera circonscrit au triangle ABC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer que les trois perpendiculaires qui se tirent des milieux des côtez d'un triangle, se coupent en un même point, parce que chacune passe par le centre du cercle circonscriptible.

PRO-

PROPOSITION VI.

PROBLEME VI.

Inscrire un Quarré dans un Cercle donné.

POur inscrire un Quarré au Cercle donné ABCD, tirez par son centre E, un Diametre quelconque AC, & à ce Diametre AC le Diametre perpendiculaire BD, & joignez les droites AB, AD, BC, CD, & la figure rectiligne ABCD sera un Quarré. 7. Fig.

DEMONSTRATION.

Les quatre angles de la figure rectiligne ABCD, sont droits, *par* 31. 3. parce qu'ils sont dans des Demi cercles : & ses quatre côtez sont égaux entre eux parce qu'ils sont les hypotenuses des quatre triangles rectangles AEC, BEC, CED, AED, qui sont égaux *par* 4. 1. Donc la figure rectiligne ABCD est un Quarré. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROPOSITION VII.

PROBLEME VII.

Décrire un Quarré autour d'un Cercle donné.

POur décrire un Quarré autour du Cercle donné EFGH, dont le centre est I, tirez à volonté les deux Diametres perpendiculaires EG, FH, & menez par les quatre points E, F, G, H, les touchantes AB, BC, CD, AD, qui feront le Quarré ABCD, lequel sera en cette façon circonscrit au Cercle EFGH. 9. Fig.

DEMONSTRATION.

Il est déja évident que la figure ABCD est circonscrite au Cercle EFGH, parce que tous ses côtez touchent la circonference, *par constr.* il est évident aussi que la même figure ABCD est un Quarré, à cause des angles droits, qui se font aux quatre points E, F, G, H, & par consequent des quatre quarrez égaux AI, BI, CI, DI, qui composent la figure ABCD, &c.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME VIII.

Inscrire un Cercle dans un Quarré donné.

9. Fig. POur inscrire un Cercle dans le Quarré donné ABCD, divisez en deux également chacun de ses côtez aux points E, F, G, H, & joignez les droites EG, FH, & le point I de leur section sera le centre du Cercle qu'on cherche, lequel par consequent on pourra décrire par les quatre points E, F, G, H, parce que les quatre lignes IE, IF, IG, IH, sont égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que les lignes AH, BF, sont égales & paralleles, les lignes AB, FH, seront aussi égales & paralleles, *par* 33. 1. Ainsi la figure AF sera un parallelogramme, & l'on connoîtra de la même façon que les figures CE, CH, DF, sont des parallelogrammes égaux chacun au premier AF: & comme ils sont rectangles, & divisez en deux également par les lignes qui partent du point I, il s'ensuit que leurs moitiez AI, BI, CI, DI, sont des quarrez égaux, & que par consequent les lignes IE, IF, IG, IH, sont égales entre elles. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROPOSITION IX.

PROBLEME IX.

Décrire un Cercle autour d'un Quarré donné.

7. Fig. POur décrire un Cercle autour du Quarré ABCD, tirez les deux diagonales AC, BD, & le point E de leur section sera le centre du Cercle qu'on cherche: de sorte que les quatre lignes EA, EB, EC, ED, seront égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que tous les angles aigus des quatre triangles AEB, AED, CEB, CED, sont *par* 4. 2. demi-droits, & par

& par consequent égaux entre eux, aussi-bien que les côtez AB, BC, CD, AD, parce qu'ils sont les côtez du Quarré ABCD, ces quatre triangles seront, *par* 26. 1. égaux entre eux, & par consequent leurs côtez EA, EB, EC, ED, pareillement égaux entre eux. Ainsi on pourra décrire du point E, comme centre, par les quatre points A, B, C, D, un Cercle. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* 7. Fig.

PROPOSITION X.

PROBLEME X.

Décrire un Triangle Isoscéle, où chacun des deux angles à la base soit double du troisiéme.

POur décrire le triangle isoscéle ABC, où chacun des deux angles à la base A & C, soit double du troisiéme angle B, tirez la ligne AB d'une longueur volontaire, & la divisez au point D, *par* 11. 2. en sorte que le quarré de BD soit égal au Rectangle sous AB, AD: & ayant décrit du point B par le point A, l'arc de cercle ACE, appliquez y, *par Prop.* 1. la droite AC égale à BD, & joignez la droite BC, & le triangle ABC sera celuy qu'on cherche. 10. Fig.

DEMONSTRATION.

Il est déja évident que le triangle ABC est isoscéle, c'est à dire que les deux côtez BA, BC, sont égaux entre eux, parce que le point B est *par constr.* le centre de l'arc ACE. D'où il suit *par* 5. 1. que les angles A & C, sont égaux entre eux, & il ne reste plus qu'à démontrer que chacun est double de l'angle B, ce qui se fera joignant la droite CD, & en faisant passer par les trois points B, C, D, une circonference de cercle; aprés quoy on raisonnera ainsi.

Parce que le Rectangle sous toute la ligne AB, & sa partie AD, est *par constr.* égal au quarré de l'autre partie BD, ou AC, son égale, la ligne AC touchera en C la circonference FBDC, *par* 37. 3. & *par* 32. 3. l'angle ACD sera égal à l'angle B: & comme *par* 32. 1. l'angle exterieur ADC est égal à la somme des deux inte-

10. Fig. interieurs opposez B, BDC, ou ACD, BCD, c'est à dire à tout l'angle BCA, ou à l'angle A, il s'ensuit *par* 6. 1. que la ligne AC, ou BD est égale à la ligne CD, & *par* 5. 1. que l'angle B, ou ACD est égal à l'angle BCD, & que par consequent tout l'angle BCA, ou bien l'angle A, son égal, est double de l'angle C. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la suivante, & aussi pour inscrire dans un Cercle donné un Decagone regulier, parce que la ligne AC, qui est appliquée dans le Cercle, dont le rayon est AB, est le côté du Decagone inscriptible dans ce Cercle, l'angle B se trouvant de 36 degrez, qui sont la 10. partie de tout le Cercle, ou de 360 degrez. Ainsi vous voyez que le rayon AB, qui est le côté de l'Exagone, comme il sera démontré dans la *Prop.* 15. étant *par* 11. 2. coupé dans la moyenne & extréme raison au point D, la plus grande partie BD est égale au côté du Decagone, & vous connoîtrez par la Proposition suivante que cette plus grande partie BD est le côté d'un Pentagone regulier inscriptible dans un Cercle circonscrit au Triangle isoscéle ABC.

PROPOSITION XI.

PROBLEME XI.

Décrire dans un Cercle donné un Pentagone regulier.

11. Fig. POur inscrire un Pentagone regulier dans le Cercle donné DEFGH, décrivez *par Prop.* 10. le triangle isoscéle ABC, où chacun des deux angles à la base A, B, soit double du troisiéme C, & *par Prop.* 2. inscrivez dans le Cercle donné le triangle DEG équiangle au triangle ABC, ce qui fera que les deux angles à la base GDE, GED, seront aussi chacun double du troisiéme angle DGE. C'est pourquoy si l'on divise chacun des deux angles GDE, GED, en deux également par les droites DF, EH, & que l'on joigne les points E, F, G, H, D, par des lignes droites, la Figure DEFGH sera un Pentagone regulier, c'est à dire équilateral & équiangle.

DEMONSTRATION.

Parce que les angles DGE, EDF, FDG, GEH, DEH, sont les moitiez de l'angle GDE, ou GED, son égal, *par constr.* ils seront égaux entre eux, & *par* 26. 3. les arcs DE, EF, FG, GH, DH, sur lesquels ils s'appuyent, seront aussi égaux entre eux, ce qui fait que *par* 29. 3. les lignes DE, EF, FG, GH, DH, sont aussi égales entre elles. Ainsi vous voyez que le Pentagone DEFGH est équilateral, & aussi équiangle, parce que chacun de ses angles s'appuye sur trois arcs égaux. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* 11. Fig.

USAGE.

Cette Proposition sert non seulement pour les Citadelles, que l'on fait ordinairement à cinq Bastions, mais encore pour resoudre la suivante & la *Prop.* 16. & de plus elle nous ouvre le chemin aux autres Polygones impairs: car il est évident que pour inscrire par exemple un Eptagone dans un Cercle donné, il faut sçavoir décrire un triangle isoscéle, où chacun des deux angles à la base soit triple du troisiéme; mais comme ce Probléme est solide, Euclide ne l'a pas resolu.

PROPOSITION XII.

PROBLEME XII.

Décrire un Pentagone regulier autour d'un Cercle donné.

POur décrire un Pentagone regulier autour du Cercle donné ABCDE, dont le centre est F, il luy faut inscrire, *par Prop.* 11. le Pentagone regulier ABCDE, & tirer par les points A, B, C, D, E, des touchantes, *par* 17. 3. & l'on aura le Pentagone qu'on cherche. 12. Fig.

DEMONSTRATION.

En tirant du centre F, les lignes FA, FG, FB, FH, FC, on connoîtra *par* 8. 1. que les triangles FGA, FGB, sont égaux entre eux, à cause du côte commun FG, des deux rayons égaux FA, FB,

par

111. Fig. *par Déf. du Cercle*, & des deux touchantes égales GA, GB, *par* 36. 3. C'est pourquoy les angles AFG, BFG, seront égaux entre eux, aussi bien que les deux FGA, FGB: & l'on connoîtra de la même façon, que les deux angles BFH, CFH, sont égaux entre eux, aussi-bien que les deux BHF, CHF; & parce que tout l'angle AFB est égal à tout l'angle BFC, *par* 27. 1. à cause des arcs égaux AB, BC, *par constr.* leurs moitiez BFG, BFH, seront aussi égales entre elles. D'où il est aisé de conclure que les quatre triangles AFG, BFG, BFH, CFH; sont égaux entre eux, ce qui se démontrera de la même façon en tirant du centre F d'autres lignes droites par les points I, D, L, E, K, & que par consequent le Pentagone GHILK est équilateral & équiangle. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROPOSITION XIII.

PROBLEME XIII.

Inscrire un Cercle dans un Pentagone donné regulier.

111. Fig. POur inscrire un Cercle dans le Pentagone regulier GHILK, il faut faire comme dans le Triangle, c'est à dire qu'il faut diviser en deux également deux de ses angles, comme G, H, par les droites GF, HF, & le point F de leur Section sera le centre du Cercle qu'on cherche, de sorte que si de ce centre F, on tire les droites FA, FB, FC, &c. perpendiculaires aux côtez GK, GH, HI, &c. ces perpendiculaires seront égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que l'angle FGB est égal à l'angle FGA, *par constr.* & que le côté FG est commun aux deux triangles FAG, FBG, qui sont rectangles en A & B, *par constr.* ces deux triangles rectangles FAG, FBG, seront égaux entre eux, *par* 26. 1. & la perpendiculaire FA sera égale à la perpendiculaire FB. On démontrera de la même façon que la perpendiculaire FC est égale à la perpendiculaire FB, & que par consequent les

les trois perpendiculaires FA, FB, FC, & toutes les 12. Fig.
autres que l'on peut tirer du point F sur les côtez du Pentagone proposé, sont égales entre elles. Ainsi on a trouvé le point F, duquel on peut décrire un cercle, dont la circonference touchera tous les côtez du Pentagone donné GHILK. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROPOSITION XIV.

PROBLEME XIV.

Décrire un Cercle autour d'un Pentagone regulier donné.

POur décrire un Cercle autour du Pentagone regu- 12. Fig.
lier ABCDE, il faut faire comme dans le Triangle, c'est à dire qu'il faut diviser en deux également deux de ses côtez, comme AB, BC, aux points M, N, & leur tirer par ces points M, N, les perpendiculaires MF, NF, & le point F de leur section sera le centre du Cercle circonscrit, de sorte que si de ce centre F, on tire aux angles du Pentagone proposé les droites FA, FB, FC, &c. toutes ces lignes seront égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne AM est égale à la ligne BM, *par constr.* & que le côté FM est commun aux deux triangles FMA, FMB, qui sont rectangles en M, *par constr.* ces deux triangles rectangles FMA, FMB, seront égaux entre eux; *par* 4. 1. & leurs hypotenuses FA, FB, seront aussi égales entre elles. On démontrera de la même façon, que l'hypotenuse FC du triangle rectangle FNC est égale à l'hypotenuse FB du triangle rectangle FNB, & que par consequent les trois lignes FA, FB, FC, & toutes les autres qu'on peut tirer du centre F, par les angles du Pentagone proposé sont égales entre elles. Ainsi on a trouvé le point F, duquel on peut décrire un Cercle, dont la circonference passera par tous les angles du Pentagone donné ABCDE. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

12. Fig.

SCOLIE.

Les trois Problêmes precedens qui ont été appliquez au Pentagone regulier, se peuvent appliquer de la même façon à tout autre Polygone regulier, & c'est à cause de cela qu'Euclide n'en parle plus dans la suite.

PROPOSITION XV.

PROBLEME XV.

Décrire dans un Cercle donné un Exagone regulier.

13. Fig. POur décrire un Exagone regulier dans le Cercle donné ABCDEF, dont le centre est G, tirez un Diametre quelconque AD, & décrivez de son extremité A, par le centre G, l'arc de Cercle BGF, qui coupe icy la circonference du Cercle donné aux deux points B, F, par lesquels vous tirerez les Diametres BE, FC, & ensuite les lignes AB, BC, CD, DE, EF, AF, & la figure ABCDEF sera un Exagone regulier, c'est à dire équilateral & équiangle.

DEMONSTRATION.

Parce que chacun des deux triangles AFG, ABG, est équilateral, il sera équiangle, *par* 5. 1. & chacun des deux angles AGF, AGB, sera le tiers de deux droits, *par* 32. 1. aussi-bien que leurs égaux & opposez au sommet CGD, DGE, *par* 15. 1. D'où il est aisé de conclure que chacun des deux autres angles égaux BGC, EGF, est aussi le tiers de deux droits, parce que les trois AGB, BGC, CGD, sont ensemble égaux à deux droits, & qu'ainsi tous les angles au centre étant égaux entre eux, l'Exagone ABCDEF sera regulier. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour nous faire connoître que le côté de l'Exagone inscrit dans un Cercle, est égal au rayon ou demi-

demi-diametre du même Cercle, ce qui nous fournit la maniere de diviser la circonference d'un Cercle donné en six parties égales, sçavoir en portant la longueur du rayon de Cercle six fois sur sa circonference : & c'est par là que l'on commence pour diviser la circonference d'un Cercle en ses 360 degrez, comme vous avez vû au *Probl.* 7. *Introd.* 13. Fig.

On void aussi que par cette Proposition, l'on peut aisément décrire un Triangle équilateral dans un Cercle donné : car si aprés avoir divisé sa circonference en six parties égales, comme il vient d'être enseigné, on joint les points de division de deux en deux seulement par trois lignes droites, ces trois lignes droites formeront un Triangle équilateral.

L'usage du Compas de proportion à l'égard de la ligne des Polygones, est fondé sur cette Proposition, qui nous fait aussi connoître que le Sinus d'un arc de Cercle de 30 degrez est égal à la moitié du rayon du Cercle, & c'est par là que l'on commence ordinairement à construire la Table des Sinus, comme vous verrez dans nôtre *Traité de Trigonometrie.*

PROPOSITION XVI.

PROBLEME XVI.

Décrire dans un Cercle donné un Pentedecagone regulier.

POur décrire dans le Cercle ABCDEF, un *Pentedecagone* regulier, ou une figure reguliere de quinze côtez, il y faut inscrire *par Prop.* 2. *ou* 15. le Triangle équilateral ACE, & *par Prop.* 11. le Pentagone regulier ABDOF ; en sorte que le Triangle & le Pentagone ayent un de leurs angles en un même point A : & alors l'arc CD sera la quinziéme partie de la circonference du Cercle. 14. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on divise par pensée la circonference du Cercle en quinze parties égales, on connoîtra que l'arc AB ou BD, en contient trois, parce que ces arcs sont chacun la cinquiéme partie de la circonference *par constr.*

14. Fig. *constr.* & l'on connoîtra aussi que l'arc AC en contient cinq, parce qu'il est la troisiéme partie de la circonference, *par constr.* D'où il est aisé de conclure que l'arc BC en contient deux, & que par consequent l'arc CD en comprend une, parce qu'ôtant trois qui sont en AB de cinq qui sont en AC, il en reste deux pour BC, & qu'en ôtant deux qui sont en BC, de trois qui sont en BD, il en reste une pour CD. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition ouvre le chemin aux autres Polygones impairs, car comme en multipliant 3 par 5, le produit 15 fait connoître que par le moyen d'une Figure reguliere de 3 & de 5 côtez, on en peut décrire une de 15 côtez : de même en multipliant par exemple 3 par 7, le produit 21 fait connoître qu'au moyen d'une Figure reguliere de 3 & de 7 côtez, on en peut décrire une de 21 côtez.



LIVRE

LIVRE V.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

EUclide traite dans ce Livre des Raisons & des Proportions, pour achever dans le sixiéme Livre de donner une entiere connoissance des Plans, dont il n'a traité que simplement dans les quatre Livres precedens.

Comme ce Livre est le fondement du sixiéme, & des autres Livres, on void qu'il est aussi le fondement des principales parties de Mathematique, où l'on ne sçauroit se passer de proportions, par la comparaison que l'on est obligé de faire continuellement des Grandeurs, les unes avec les autres : & qu'ainsi il est absolument necessaire pour entendre tous les Traitez de Mathematique, lesquels se démontrent par ses proportions; car dans la Geometrie Pratique par exemple, on mesure les lignes accessibles & inaccessibles sur la terre, par des raisonnemens qui dépendent des Proportions; L'Arithmetique contient la Regle de Trois, qu'on appelle Regle de Proportion, parce qu'elle se pratique par les Proportions; L'Astronomie compare entre elles les differentes grandeurs des Planetes, & de leurs Orbes, & leurs diverses distances à la Terre, ou au Soleil; La Statique considere les proportions des Poids, & la Musique les applique aux Sons. De sorte que l'on peut assurer, que sans la connoissance des Proportions, on ne peut presque rien conclure de certain dans les Mathematiques.

DEFINITIONS.

I.

La *Partie* est une petite Grandeur comparée à une plus grande, qu'elle mesure precisément. *Ainsi on connoît qu'une ligne de 2 pieds est une partie d'une ligne de 6 pieds, parce qu'elle la mesure exactement par 3, c'est à dire qu'elle y est comprise trois fois sans aucun reste.*

C'est ainsi qu'Euclide a défini la Partie, qu'on appelle *Partie aliquote*, pour la distinguer de celle qu'on appelle *Partie aliquante*, qui ne mesure pas exactement son Tout: comme une ligne de 2 pieds à l'égard d'une ligne de 5 pieds, qu'elle ne mesure pas exactement, y étant comprise deux fois avec 1. de reste.

On entend pour le *Tout* une quantité plus grande par rapport à une plus petite, soit qu'elle la contienne en effet, ou qu'elle ne la contienne pas: & pour *Partie* en général, une petite Grandeur à l'égard d'une plus grande, soit qu'elle la mesure, ou non, Comme quand on dit que le *Tout est plus grand que sa partie.*

La Partie aliquote prend son nom & sa dénomination du nombre des parties égales, par lequel elle divise une Grandeur, c'est à dire par le nombre des fois qu'elle est comprise dans cette Grandeur, ou Tout. Ainsi une Partie aliquote qui mesure une Grandeur deux fois, s'appelle un demi, & s'écrit ainsi $\frac{1}{2}$: & celle qui la mesure trois fois, se nomme un Tiers, & s'exprime ainsi, $\frac{1}{3}$ &c.

La Partie aliquante a quelquefois des Parties aliquotes, qui mesurent la Grandeur, dont elle est partie, comme par exemple 6, qui est une partie aliquante de 8, a pour Partie aliquote 2, qui est le Quart de 8, dont par consequent 6 sont les trois Quarts, puisque 6 contient trois fois 2, que l'on écrit ainsi, $\frac{3}{4}$

Les Parties, soit aliquotes, soit aliquantes, s'appellent *Fractions*: à l'égard du Tout, dont elles sont parties: & en les marquant en nombres, comme nous venons de faire, le nombre de dessus s'appelle *Numerateur de la Fraction*, & celuy de dessous se nomme *Dénominateur de la même Fraction.* Ainsi dans cette Fraction $\frac{2}{5}$, qui signifie deux Cinquiémes, le Numerateur est 2, & le Dénominateur est 5.

II.

La *Grandeur multiple d'une autre Grandeur*, est celle qui contient cette autre Grandeur un certain nombre de fois exactement, c'est à dire sans aucun reste. *Ainsi on connoît qu'une ligne de 6 pieds est multiple d'une ligne de 2 pieds, parce qu'elle la comprend trois fois precisément.*

Il est évident que la Grandeur multiple est plus grande que celle dont elle est dite multiple, qui en est une partie aliquote, & qui s'appelle *Grandeur Soumultiple*, à l'égard de sa multiple, laquelle prend son nom & sa dénomination du nombre des fois qu'elle contient sa Soumultiple. Ainsi un ligne de 6 pieds est appellée *Triple* d'une ligne de 2 pieds, parce qu'elle la contient trois fois exactement : mais la ligne de 2 pieds est appellée *Soutriple*, de la ligne de 6 pieds, parce qu'elle y est contenuë trois fois precisément.

III.

Les *Equimultiples de plusieurs Grandeurs* sont des Grandeurs qui contiennent également, ou un nombre égal de fois, ou autant de fois, celles dont elles sont dites Equimultiples, c'est à dire leurs Parties aliquotes, ou leurs Soumultiples, lesquelles par consequent mesurent également leurs Equimultiples. *Ainsi parce qu'une ligne de 12 pieds, contient autant de fois une ligne de 2 pieds, qu'une ligne de 30 pieds contient une ligne de 5 pieds, les deux lignes de 12 pieds & de 30 pieds seront Equimultiples des deux lignes de 2 pieds & de 5 pieds.*

C'est ainsi qu'Euclide a défini les Equimultiples, mais nous dirons plus généralement que les *Equimultiples de plusieurs Grandeurs*, sont celles qui contiennent un nombre égal de fois les Grandeurs, dont elles sont dites Equimultiples, soit que ce nombre soit entier ou une Fraction, ou bien un nombre entier avec des fractions, qui soient des Parties semblables.

Ainsi nous connoissons que 5 & 10 sont Equimultiples de 2 & de 4, parce que 5 contient 2 deux fois & 1 davantage, qui est la moitié de deux, & que pareillement 10 contient 4 deux fois & deux davantage, qui sont la moitié de 4.

C'est dans ce sens que nous entendrons parler dans la suite, lorsque nous dirons que deux Grandeurs par exemple

contiennent, ou sont contenuës autant de fois l'une que l'autre dans deux autres Grandeurs, chacune dans la sienne.

Nous entendons pour *Parties semblables de plusieurs Grandeurs*, soit aliquotes, soit aliquantes, celles qui sont comprises autant de fois l'une que l'autre dans ces Grandeurs. Ainsi 9 & 15 sont des Parties semblables de 12 & de 20, parce que 9 est les trois Quarts de 12, aussi-bien que 15 de 20.

Quand on multiplie deux Grandeurs, quelconques par une même Grandeur, les deux Grandeurs qui se produisent par cette multiplication, sont Equimultiples des deux premieres, lesquelles par consequent seront des Parties semblables des deux dernieres.

Ainsi en multipliant les deux Grandeurs *a* & *c*, par la même Grandeur *d*, on aura ces deux Grandeurs *ad*, *cd*, qui sont Equimultiples deux des premieres *a*, *c*, lesquelles sont des parties semblables des deux quantitez *ad*, *cd*, soit que *d* represente un nombre entier ou bien une fraction.

I V.

La *Raison* est le rapport de deux Grandeurs de même genre, que l'on compare l'une à l'autre selon leur quantité, pour sçavoir comment & combien de fois l'une contient ou est contenuë dans l'autre.

Les Grandeurs de même genre sont appellées *Omogenes* comme deux lignes, deux surfaces, & deux solides: & les Grandeurs de divers genres se nomment *Eterogenes*, comme une ligne & une surface, & un solide, &c.

Les deux Grandeurs Omogenes que l'on compare ensemble dans une Raison, sont appellées *Termes de cette Raison*, dont celuy qui est comparé s'appelle *Antecedent*, & l'autre auquel on compare le premier, se nomme *Consequent*.

Ainsi dans la Raison de 2 à 3, l'Antecedent est 2, & le Consequent est 3. Cette Raison se peut aisément comprendre en l'exprimant par cette Fraction $\frac{2}{3}$, dont le Numerateur 2 est comme l'Antecedent, & le Dénominateur 3 comme le Consequent.

Il est évident que les Termes d'une Raison doivent être omogenes, & d'une grandeur finie, parce qu'autrement on ne pourroit pas dire comment & combien de fois une Grandeur est contenuë dans une autre. Ce qui a fait dire à Euclide que deux quantitez ont une Raison, lorsqu'étant multipliées elles se peuvent surpasser l'une & l'autre. Ainsi on connoît qu'il n'y a aucune Raison entre une ligne & une surface, parce que la Ligne étant multipliée, c'est à dire prolongée autant

que

que l'on voudra, ne donne aucune largeur, & ne sçauroit par consequent égaler une surface, qui outre la longueur a une largeur.

Il n'y a même aucune Raison entre une Ligne finie & une infinie, quoique ces deux Grandeurs soient omogenes, parce que c'est une proprieté particuliere à la Grandeur finie de pouvoir mesurer & de pouvoir être mesurée, afin que l'on puisse dire que l'une est comprise un certain nombre de fois dans l'autre.

Il est évident aussi, que pour trouver la Raison d'une Grandeur à une autre Grandeur, il faut diviser le Consequent par l'Antecedent, & le Quotient qu'on appelle *Quantité de la Raison*, fait connoître le rapport de l'Antecedent au Consequent, ou la Grandeur relative de l'Antecedent par rapport au Consequent, qui est proprement ce qu'on appelle *Raison*.

Puisque donc la Raison est une quantité ou grandeur quoique relative, tout ce qui convient à la quantité ou grandeur en général, convient aussi à la Raison: ce qui fait qu'on divise la Raison en *Raison d'Egalité*, & en *Raison d'Inégalité*, & qu'une Raison peut aussi être égale, ou plus grande qu'une autre Raison, où l'on doit bien prendre garde de ne pas confondre la *Raison d'Egalité*, avec l'égalité de deux Raisons; parce que

La *Raison d'Egalité* est une Raison, où l'Antecedent est égal au Consequent: comme la Raison de 4 à 4, de B à B, &c.

La *Raison d'Inégalité* est une Raison, où l'Antecedent est plus petit ou plus grand que le Consequent; ce qui fait qu'une semblable Raison se divise en *Raison de plus petite Inégalité*, & en *Raison de plus grande Inégalité*.

La *Raison de plus petite Inégalité* est une Raison, où l'Antecedent est plus petit que le Consequent: comme la Raison de 2 à 3. Il est évident par ce qui a été dit auparavant, que la *Quantité* d'une semblable Raison est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent est contenu dans le Consequent, ou ce qui est la même chose, quelle Partie il est du Consequent.

Ainsi on connoît que la quantité de la Raison de 6 à 12 est un demi, parce que 6 est la moitié de 12, & cette Raison s'appelle *Soûdouble*. De même la quantité de la Raison de 2 à 6 est un tiers, parce que deux est le tiers de 6, & cette Raison s'appelle *Soûtriple*. Pareillement la Quantité de la Raison de 4 à 6 est deux tiers; parce que 4 est égal aux deux tiers de 6, & cette Raison s'appelle *Sousesquialtere*, parce que 4 est contenu dans 6 une fois & une moitié de plus.

La *Raison de plus grande Inégalité* est une Raison où l'Antecedent est plus grand que le Consequent: comme la Raison de 3 à 2. Il est évident par ce qui a été dit auparavant, que

que la *Quantité* d'une semblable Raison est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent, contient le Consequent, ou ce qui est la même chose, quelle Partie le Consequent est de l'Antecedent.

Ainsi on connoît que la Quantité de la Raison de 12 à 6 est 2, parce que 12 contient 6 deux fois, & cette Raison s'appelle *Double*. De même la quantité de la Raison de 6 à 2 est 3, parce que 6 comprend 2 trois fois, & cette Raison s'appelle *Triple*. Pareillement la Quantité de la Raison de 6 à 4, est un demi, parce que 6 comprend 4 une fois & demi, & cette Raison se nomme *Sesquialtere*.

La Raison d'Inégalité se divise encore en celle qu'on appelle de *Nombre à Nombre*, & à celle qu'on appelle *Raison sourde*.

La *Raison de Nombre à Nombre* qu'on appelle aussi *Raison Rationnelle*, est celle qui se peut exprimer en Nombres, c'est à dire où l'on peut exprimer par Nombres combien de fois l'Antecedent contient ou est contenu dans le Consequent. Telle est la Raison du Pied à la Toise, parce que le pied est à la toise comme 1 à 6, où l'Antecedent est contenu six fois dans le Consequent. Telle est aussi la Raison d'une ligne de 6 pieds à une ligne de 4 pieds, où l'Antecedent contient le Consequent une fois & demi.

La *Raison Sourde* qu'on appelle aussi *Raison Irrationnelle*, est celle qui ne peut pas être exprimée en Nombres; c'est à dire où il est impossible d'exprimer par Nombres combien de fois l'Antecedent est contenu ou contient le Consequent: comme la Raison qui est entre le côté d'un Quarré & sa Diagonale, qui est telle que bien que chaque ligne à part ait des parties aliquotes de plus petites en plus petites, il ne peut neanmoins arriver qu'une de celles qui mesure par exemple le côté du Quarré, quelque petite qu'on la prenne, puisse mesurer exactement la Diagonale, c'est à dire qu'elle y soit comprise un certain nombre de fois sans aucun reste, ce qui empêche de pouvoir exprimer en Nombres le rapport de ces deux lignes.

Lorsque deux Grandeurs ont entre elles une Raison de Nombre à Nombre, on les appelle *Commensurables*, parce qu'elles ont quelque partie qui leur peut servir de commune mesure: & *Incommensurables*, quand leur Raison est irrationnelle parce qu'il n'y a point de partie si petite qu'elle puisse être, qui puisse servir à l'une & à l'autre de ces deux Grandeurs de commune mesure, c'est à dire qui puisse mesurer exactement l'une & l'autre.

La Raison dont nous avons parlé jusques à present, & dont nous parlerons dans la suite, a été appellée *Raison Geometrique*,

trique, pour la differencier de la *Raison Arithmetique*, qui est le rapport de deux Grandeurs omogenes, en considerant de combien l'une est surpassée, ou surpasse l'autre, quand elles sont inégales, ce qui s'appelle *Difference*. Quand on parle simplement de *Raison*, cela s'entend de la *Geometrique*, dont Euclide entend parler dans ses Elemens.

V.

Les *Raisons Egales*, ou *Semblables* sont celles où les Antecedens sont également contenus, ou contiennent également leurs Consequens, ou ce qui est la même chose, où l'Antecedent d'une Raison contient autant de fois quelque partie aliquote que ce soit de son Consequent, que l'Antecedent de l'autre Raison contient une semblable partie aliquote de son Consequent.

Ainsi on connoît que la Raison de 2 à 3, est la même ou égale, ou semblable à la raison de 4 à 6, parce que 2 est dans 3, une fois & demi, & que pareillement 4 est dans 6 une fois & demi : ou bien parce que 2 contient deux tiers de 3, & qu'aussi 4 contient 2 tiers de 6.

C'est ce qui fait aussi dire que 2 est à 3, comme 4 est à 6, & pour abreger on se sert de ces quatre points :: pour exprimer l'Egalité de ces deux Raisons, en écrivant ainsi, 2, 3 :: 4, 6, pour faire connoître que la Raison de 2 à 3, est égale à la Raison de 4 à 6. Pareillement pour faire connoître que *a* est à *ad*, comme *b* est à *bd*, on écrit ainsi, *a*, *ad* :: *b*, *bd*.

V I.

Les *Grandeurs proportionnelles* sont celles qui ont une même Raison : *telles sont les quatre suivantes* 2, 3, 4, 6, *parce que la Raison de 2 à 3, est égale à celle de 4 à 6 : & aussi les quatre suivantes* a, ad, b, bd, *parce que la premiere* a *est autant de fois contenuë dans la seconde* ad, *que la troisiéme* b *dans la quatriéme* bd, *ce nombre égal de fois étant representé par la même lettre* d, *qui peut être prise pour un nombre entier, ou bien pour une fraction.*

VII.

La *Raison plus grande qu'une autre* est celle dont l'Antecedent contient plus de fois quelque partie aliquote de son Consequent, que l'Antecedent de l'autre ne contient une semblable partie aliquote de son Consequent. *Ainsi on connoît que la Raison de* 101 *à* 10 *est plus grande que la Raison de* 500 *à* 50, *parce que* 101. *contient cent & une fois la dixiéme partie de* 10, *au lieu que* 500 *contient seulement cent fois la dixiéme partie de* 50, *qui est* 5.

VIII.

La *Proportion*, ou *Analogie*, que l'on confond souvent mal à propos avec la Raison, est une similitude, ou égalité de deux Raisons : *comme*, 2, 3 :: 4, 6. *où l'on void que quatre quantitez proportionnelles font une Proportion.*

Dans une Proportion il y a toûjours quatre Termes, dont le premier & le quatriéme, qui sont l'Antecedent de la premiere Raison, & le Consequent de la seconde, s'appellent *Extrêmes* : & le second & le troisiéme, qui sont le Consequent de la premiere Raison & l'Antecedent de la deuxiéme, s'appellent *Moyens* ; Quant aux deux Antecedens, ou aux deux *Consequens*, on les nomme *Termes homologues*.

Ces quatre Termes se reduisent quelquefois à trois, sçavoir lorsque le consequent de la premiere Raison est le même que l'Antecedent de la seconde, & alors cette Proportion s'appelle *Continuë*, comme celle-cy, 2, 4 :: 4, 8 : & on la nomme *Discontinuë*, quand les quatre Termes sont differens comme celle-cy, 2, 3 :: 4, 6.

La Proportion dont nous venons de parler, & dont nous parlerons dans la suite, a été appellée *Proportion Geometrique*, pour la distinguer de la *Proportion Arithmetique*, qui est une égalité de deux Raisons Arithmetiques, laquelle se rencontre entre quatre Grandeurs, dont la premiere surpasse la deuxiéme, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont la troisiéme surpasse la quatriéme, ou en est surpassée : où il peut aussi arriver que les quatre Termes se reduisent à trois ; mais comme cette Proportion n'a point d'usage dans les Elemens, il ne sera parlé dans la suite que de la Geometrique, sous le seul nom de *Proportion*.

IX.

IX.

Les *Grandeurs continuellement proportionnelles*, font celles qui sont en Proportion continuë, *comme*, 2, 4, 8, *& aussi* 1, 3, 9, 27, *& encore* aaa, aab, abb, bbb, &c.

Une suite de Grandeurs continuellement proportionnelles, s'appelle *Progression*, laquelle peut être *Geometrique*, & *Arithmetique*, selon que ces Grandeurs seront dans une continuelle Proportion Geometrique, ou Arithmetique. Ainsi on connoît que ces Grandeurs 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c. font une *Progression Geometrique*, & que ces Grandeurs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. font *une Progression Arithmetique*.

X.

Dans une Progression Geometrique, c'est à dire dans une suite de quantitez continuellement proportionnelles, la Raison de la premiere à la troisiéme est *Doublée* de la Raison de la premiere à la deuxiéme, ou de la Raison de la deuxiéme à la troisiéme, parce que ces deux Raisons sont égales : & la Raison de la premiere à la quatriéme est *Triplée* de la Raison de la premiere à la seconde, ou de la Raison de la seconde à la troisiéme, ou de la Raison de la troisiéme à la quatriéme, & ainsi en suite.

Ainsi on connoît que dans cette suitte de quantitez continuellement proportionnelles 32, 16, 8, 4, 2, 1, *la Raison de* 32 *à* 8 *est doublée de la Raison de* 32 *à* 16, *ou de la Raison de* 16 *à* 8, *parce qu'elle comprend ces deux Raisons égales : & que la Raison de* 32 *à* 4 *est Triplée de la Raison de* 32 *à* 16, *ou de la Raison de* 16 *à* 8, *ou de la Raison de* 8 *à* 4, *parce qu'elle comprend ces trois Raisons égales.*

Il faut bien prendre garde de ne pas confondre la Raison Double avec la Raison Doublée, ni la Raison Triple avec la Raison Triplée. Dans l'Exemple precedent, nous avons remarqué, que la Raison de 32 à 8, qui est quadruple, est Doublée de la Raison de 32 à 16, qui est double : & que la Raison de 32 à 4, qui est Octuple est Triplée de la Raison de 32 à 16, qui est double, cette Raison Triplée ayant été ainsi appellée, parce qu'elle est composée de trois Raisons égales, comme la premiere a été appellée Doublée, parce qu'elle est composée de deux Raisons égales. Cecy s'entendra

mieux, quand nous aurons expliqué ce que c'est qu'une Raison composée de plusieurs Raisons.

Nous dirons donc que la *Raison composée de plusieurs Raisons* est celle dont l'Antecedent est égal au produit qui vient en multipliant ensemble les Antecedens de toutes ces Raisons, & le Consequent est pareillement égal au produit sous les Consequens des mêmes Raisons.

Ainsi on connoîtra que la Raison composée de ces trois Raisons $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, est celle-cy, $\frac{48}{105}$, c'est à dire que la Raison de 48 à 105, ou de 16 à 35 en prenant le tiers de chaque terme, est composée de la Raison de 2 à 3, de la Raison de 4 à 5, & de la Raison de 6 à 7, parce que l'Antecedent 48 est égal au produit des trois Antecedens 2, 4, 6, & que le Consequent 105 est égal au produit des Consequens 3, 5, 7.

La necessité de cette Multiplication sera évidente à celuy qui considerera qu'une Raison composée d'une Double par exemple & d'une Triple, dont les quantitez sont 2 & 3, est Sextuple, dont la quantité 6 est égale au produit des deux quantitez 2, & 3; étant certain que ce qui est double d'un triple ou triple d'un double, est sextuple, parce que 2 multiplié par 3, ou 3 multiplié par 2, fait 6. D'où il suit que la *Quantité d'une Raison Doublée* est un nombre quarré, sçavoir le quarré de la quantité commune aux deux Raisons égales, qui composent la Raison Doublée: & que la *Quantité d'une Raison Triplée* est un nombre cubique, sçavoir le Cube de la quantité commune aux trois Raisons égales, qui composent la Raison Triplée; & que par consequent la *Raison Doublée d'une Raison Double*, est Quadruple, parce que le Quarré de 2 est 4, & que la *Raison Doublée d'une Raison Triple* est Noncuple, parce que le Quarré de 3 est 9: & que pareillement la *Raison Triplée d'une Raison Double* est Octuple, parce que le Cube de 2 est 8. Ainsi des autres.

Il est aisé de connoître par ce qui vient d'être dit, qu'une même Raison peut être composée de plusieurs Raisons differentes, parce que leurs quantitez étant multipliées ensemble peuvent produire un même nombre, pour la quantité de la Raison, qu'elles composent. Ainsi on connoît que la Raison Dodecuple, dont la quantité est 12, est composée d'une Raison Triple, & d'une Raison Quadruple, parce que leurs quantitez 3, 4, étant multipliées ensemble font 12: & aussi d'une Raison Double & d'une Raison Sextuple, parce que leurs quantitez 2, 6, étant multipliées ensemble, produisent le même nombre 12. D'où il suit que les Raisons composées de Raisons égales sont égales.

Il

Il est aussi évident que dans une suite d'autant de Grandeurs que l'on voudra, la Raison de la premiere à la derniere, est composée de toutes les Raisons particulieres de la premiere à la deuxiéme, de la seconde à la troisiéme, de la troisiéme à la quatriéme, & ainsi ensuite jusqu'à la derniere Grandeur, parce que les quantitez de toutes ces Raisons étant multipliées ensemble, produisent la quantité de la Raison de la premiere à la derniere. Ainsi on connoît que de ces quatre Grandeurs a, b, c, d, la Raison de la premiere à la derniere, sçavoir $\frac{a}{d}$ est composée de la Raison $\frac{a}{b}$ de la premiere à la seconde, de la Raison $\frac{b}{c}$ de la seconde à la troisiéme, & de la Raison $\frac{c}{d}$ de la troisiéme à la quatriéme, parce que ces trois Raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, étant multipliées ensemble font celle-cy $\frac{abc}{bcd}$, ou $\frac{a}{d}$, sçavoir la Raison de la premiere à la derniere. Ces Remarques servent pour la démonstration des *Prop. 22. & 23.*

Comme ce Livre est composé principalement pour démontrer les Définitions qui restent, lesquelles servent pour argumenter par Proportion, nous avons crû qu'il étoit plus à propos de les omettre icy pour les expliquer en leur lieu, & les démontrer en même temps dans les Propositions suivantes.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Les Grandeurs égales entre elles ont une semblable Raison à une même Grandeur: & une même Grandeur a une semblable Raison à des Grandeurs égales.

A. 24. B. 24. C. 8. JE dis premierement que si les deux quantitez A, & B, sont égales entre elles; elles auront une même Raison à la troisiéme quantité C.

Dé-

DEMONSTRATION.

Parce que les deux quantitez A, B, font égales, *par supp.* elles contiendront autant de fois l'une que l'autre une même partie aliquote de la troisiéme quantité C, & ainsi *par Déf.* 5. elles auront une même raison à cette troisiéme quantité C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si les Grandeurs A, & B, sont égales entre elles, la quantité C aura même Raison à la Grandeur A, qu'à la quantité B.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux quantitez A, B, sont égales, *par supp.* leurs semblables parties aliquotes seront aussi égales, & la troisiéme quantité C les contiendra chacune également; c'est pourquoy *par Déf.* 5. cette troisiéme quantité C aura même Raison à chacune des deux quantitez égales A, B. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 34. & aussi pour démontrer les *Prop.* 14. *&* 15. *du Liv.* 6. & encore la *Prop.* 34. 12.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

La plus grande de deux quantitez a plus grande Raison à une troisiéme que la plus petite: & cette troisiéme quantité a plus grande Raison à la plus petite qu'à la plus grande.

A. 48. C. 12.
B. 36.

JE dis premierement que si des deux quantitez A, B, la plus grande est A, cette plus grande A, a plus grande Raison à la troisiéme quantité C, que la plus petite B, à la même quantité C.

DEMONSTRATION.

Parce que la grande quantité A est plus grande que la

la quantité B, *par supp.* elle contiendra plus de fois une certaine partie aliquote de C, que la quantité B, & *par Déf.* 7. la Raison de A à C, sera plus grande que la Raison de B à C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si la grandeur B est plus petite que la grandeur A, la Raison de C, à B, est plus grande que la Raison de C à A.

DEMONSTRATION.

Parce que la Grandeur B est plus petite que la Grandeur A, *par supp.* ses parties aliquotes seront plus petites que les aliquotes semblables de la Grandeur A, & ainsi la quantité C contiendra plus de fois une partie aliquote de la quantité B qu'une semblable partie aliquote de la quantité A; c'est pourquoy *par Déf.* 7. la Raison de C à B, sera plus grande que celle de C à A. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 14.

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Les Grandeurs qui ont une même Raison à une même Grandeur, sont égales entre elles : & celles ausquelles une même Grandeur a même Raison, sont aussi égales entre elles.

A. 3. C. 2.
B. 3.

JE dis premierement, que si chacune des deux quantitez A, B, a une même Raison à la troisiéme quantité C, ces deux quantitez A, B, sont égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de A à C, est égale à celle de B à C, *par supp.* la quantité A contiendra autant de fois une certaine partie aliquote de la quantité C, que la quantité B, *par Déf.* 5. & par consequent ces deux quantitez A, & B, seront égales entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si la troisiéme quantité

tité C, a même Raison à chacune des deux quantitez A, B, ces deux quantitez A, B, sont aussi égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de C à A, est égale à celle de C à B, *par supp.* une certaine partie aliquote de A sera comprise dans C, autant de fois qu'une semblable aliquote de B, *par Déf.* 5. C'est pourquoy une partie aliquote de A sera égale à une semblable aliquote de B, & par consequent A & B, seront égales. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 14 & aussi des *Prop.* 2. 5. 7. 14. 25. & 31. *du L.* 6. & encore de la *Prop.* 34. *du L.* 11. & enfin de la *Prop.* 15. *du L.* 12.

PROPOSITION X.

THEOREME X.

De deux quantitez, celle qui a plus grande Raison à une troisiéme quantité, est la plus grande : & au contraire, celle à laquelle une troisiéme a plus grande Raison, est plus petite.

A. 12. C. 2.
B. 8.

JE dis premierement que si des deux Grandeurs A, B, la premiere A, a plus grande Raison à la troisiéme quantité C, que la seconde B à la même quantité C, cette premiere quantité A est plus grande que la seconde B.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de A, à C, est plus grande que celle de B, à C, *par supp.* l'Antecedent A contient plus de fois une certaine partie aliquote de son Consequent C, que l'Antecedent B ne contient une semblable aliquote de son Consequent C, *par Déf.* 7. D'où il suit que la quantité A est plus grande que la quantité B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je

Je dis en second lieu, que si la troisiéme quantité C, a plus grande Raison à la seconde B, qu'à la premiere A, cette seconde quantité B, est plus petite que la premiere A.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de C, à B, est plus grande que celle de C, à A, *par supp.* la quantité C, contient plus de fois une certaine partie aliquote de B, qu'une semblable aliquote de A, *par Déf.* 7. & par consequent B sera moindre que A. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 14.

PROPOSITION XI.

THEOREME XI.

Les Raisons qui sont égales à une même Raison, sont égales entre elles.

A. 2. B. 3. :: C. 4. D. 6.
E. 8. F. 12. :: C. 4. D. 6.

JE dis que si les deux Raisons de A à B, & de E à F, sont égales chacune à celle de C à D, elles sont égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Parce que A est à B, comme C est à D; l'Antecedent A contiendra autant de fois son Consequent B, que l'Antecedent C son Consequent D: & pareillement parce que E est à F, comme C est à D, l'Antecedent E contiendra autant de fois son Consequent F, que l'Antecedent C son Consequent D, *par Déf.* 5. C'est pourquoy l'Antecedent A contiendra autant de fois son Consequent B, que l'Antecedent E son Consequent F, & *par Déf.* 5. La Raison de A à B, sera égale à celle de E à F. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 2. 5. & 31. *du L.* 6. & de la *Prop.* 34. *du Liv.* 12.

PRO-

PROPOSITION XII.

THEOREME XII.

Si plusieurs quantitez sont proportionnelles, il y aura même Raison d'un Antecedent à son Consequent que de la somme de tous les Antecedens, à la somme de tous les Consequens.

A. 2. B. 4. :: C. 3. D. 6. JE dis que s'il y a même Raison de A, à B, que de C, à D, il y aura aussi même Raison de l'Antecedent A, au Consequent B, que de la somme A+C des deux Antecedens, à la somme B+D, des deux Consequens.

DEMONSTRATION.

Parce que A est à B, comme C est à D, *par supp.* l'Antecedent A contiendra autant de fois quelque partie aliquote que ce soit de son Consequent B, que l'Antecedent C contient une semblable aliquote de son Consequent D, par exemple la moitié, *par Déf.* 5. & comme la moitié de B jointe à la moitié de D, fait la moitié de B+D, on connoît que A+C contiendra autant de fois la moitié de B+D, que A contient la moitié de B, & que par consequent la Raison de A, à B, est semblable à celle de A+C, à B+D. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer les *Prop.* 5. 6. & 7. *du Liv.* 12. & aussi pour démontrer, qu'une Ellipse est moyenne proportionnelle entre les deux Cercles décrits autour de ses deux Axes, comme vous verrez dans nôtre *Planimetrie.* Elle sert encore pour la démonstration de la Regle de Compagnie: & encore pour démontrer la *Prop.* 20. 6. & la *Prop.* 25. 11.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XIII.

Si de deux Raisons égales, l'une est plus grande qu'une troisiéme Raison, l'autre sera aussi plus grande que la même troisiéme Raison.

A. 2. B. 3. :: C. 4. D. 6.
E. 7. F. 12.

JE dis que si les deux Raisons de A à B, & de C à D, sont égales, & que la premiere Raison de A à B, soit plus grande que la troisiéme Raison de E à F, aussi la seconde Raison de C à D, sera plus grande que la même troisiéme Raison de E à F.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de A à B. est plus grande que celle de E à F, *par supp.* l'Antecedent A contiendra plus de fois une partie aliquote quelconque de son Consequent B, que l'Antecedent E ne contient une semblable aliquote de son Consequent F, *par Déf.* 7. & comme l'Antecedent C contient une semblable partie aliquote de son Consequent D, autant de fois que l'Antecedent A contient celle de son Consequent B, parce qu'il y a même Raison de A, à B, que de C, à D, *par supp.* il est de necessité que l'Antecedent C contienne une partie aliquote de son Consequent D, plus de fois que l'Antecedent E, ne contient une semblable aliquote de son Consequent F, & que *par Déf.* 7. la Raison de C, à D, soit aussi plus grande que celle de E, à F. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIV.

Si de quatre Grandeurs proportionnelles, la premiere est plus grande, ou égale, ou plus petite que la troisiéme, la seconde sera aussi plus grande, ou égale, ou plus petite que la quatriéme.

A, B. :: C, D.
12. 3. :: 4. 1.

JE dis premierement que si des quatre quantitez proportionnelles A, B, C, D, la premiere A est plus grande que la troisiéme

me C, aussi la seconde B, est plus grande que la quatriéme D.

DEMONSTRATION.

Parce que A est plus grande que C *par supp.* il y aura plus grande Raison de A, à B, que de C, à B, *par Prop.* 8. & comme la Raison de A, à B, est égale à celle de C, à D, *par supp.* il y aura aussi plus grande Raison de C, à D, que de C à B, & *par Prop.* 10. B sera plus grande que D. *Ce qu'il falloit démontrer.*

A, B, :: C, D. Je dis en second lieu, que si des 3. 4. :: 3. 4. quatre quantitez proportionnelles A, B, C, D, la premiere A est égale à la troisiéme C, aussi la seconde B, est égale à la quatriéme D.

DEMONSTRATION.

Parce que A est égale à C, *par supp.* il y aura même Raison de A, à B, que de C à B, *par Prop.* 7. & comme la Raison de A, à B, est égale à celle de C, à D, *par supp.* il y aura aussi même Raison de C, à D, que de C à B, & *par Prop.* 9. B sera égale à D. *Ce qu'il falloit démontrer.*

A. B. :: C, D. Enfin je dis que si des quatre quantitez 2. 4. :: 3. 6. proportionnelles A, B, C, D, la premiere A, est plus petite que la troisiéme C, aussi la seconde B, est plus petite que la quatriéme D.

DEMONSTRATION.

Parce que A est plus petite que C, *par supp.* il y aura moindre Raison de A, à B, que de C, à B, *par Prop.* 8. & comme la Raison de A, à B, est égale à celle de C, à D, *par supp.* il y aura aussi moindre Raison de C, à D, que de C à B, & *par Prop.* 10. B sera plus petite que D. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 24. & aussi pour démontrer les *Prop.* 2. 5. 15. & 25. *du Liv.* 6.

LEMME I.

Si quatre quantitez sont proportionnelles, le produit des deux extrémes est égal au produit des deux moyennes.

IL *est évident que des quatre Grandeurs* a, ad, b, bd, *qui sont proportionnelles*, par Déf. 6, *le produit des deux extrémes*, a, bd ; *est égal au produit des deux moyennes* ad, b. *parce qu'en multipliant ensemble les deux extrémes* a, bd, *il vient autant qu'en multipliant ensemble les deux moyennes* ad, b, *sçavoir* abd. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

Les quatre grandeurs sont proportionnelles, où le produit des deux extrémes est égal au produit des deux moyennes.

JE *dis que les quatre grandeurs* a, b, c, d, *sont proportionnelles, si le produit* ad *des deux extrémes, est égal au produit* bc *des deux moyennes*.

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que a *soit contenuë dans* b *un certain nombre de fois exprimé par* m, *auquel cas* am *sera égale à* b, *& que* c *soit contenuë dans* d, *un certain nombre de fois exprimé par* n, *auquel cas* cn *sera égale à* d, *au lieu du produit* ad *égal au produit* bc, *on aura le produit* acm *égal au produit* acn : *c'est pourquoy en divisant chacune de ces deux grandeurs égales par* ac, *on aura* m *égale à* n *d'où il suit que* b *contient autant de fois* a, *que* d *contient* c, *& que* par Déf. *6. les quatre quantitez* a, b, c, d, *sont proportionnelles*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME XV.

Les Grandeurs Equimultiples, & leurs semblables parties aliquotes sont proportionnelles.

JE dis que les quatre Grandeurs *ad*, *bd*, *a*, *b*, dont les deux premières *ad*, *bd*, sont Equimultiples des deux dernieres *a*, *b*, sont proportionnelles.

DEMONSTRATION.

Parce que des quatre Grandeurs proposées *ad*, *bd*, *a*, *b*, en multipliant ensemble les deux extremes *ad*, *b*, il vient le même produit qu'en multipliant ensemble les deux moyennes *bd*, *a*, sçavoir *abd*, il est de necessité *par Lem.* 2. que les quatre Grandeurs *ad*, *bd*, *a*, *b*, soient proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 1. & 33. *du L.* 6. & aussi pour démontrer la *Prop.* 13. 12.

PROPOSITION XVI.

THEOREME XVI.

Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles seront aussi alternativement proportionnelles.

On appelle *Raison Alterne*, ou *Raison par Echange*, lorsque dans une proportion, l'on change de place aux deux termes moyens, en substituant chacun à la place de l'autre, & alors la Proportion subsiste toûjours, c'est à dire que les quatre Grandeurs, qui étoient auparavant proportionnelles, le seront aussi dans cette disposition de termes : mais il le faut démontrer.

A, B. :: C, D. Je dis donc que si les quatre Gran-
2. 3. :: 4. 6. deurs A, B, C, D, sont proportionnelles, aussi les quatre A, C, B, D, sont proportionnelles.

DEMONSTRATION.

Car puisque les quatre quantitez A, B, C, D, sont proportionnelles, *par supp.* il s'ensuit *par Lem.* 1. que le produit AD des deux extrémes est égal au produit BC des deux moyennes, & *par Lem.* 2. que les quatre quantitez A, C, B, D, sont aussi proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ou

Ou bien, parce que la Raiſon de A à C, eſt compoſée des deux Raiſons de A à B, & de B à C, leſquelles ſont égales aux deux Raiſons de B à C, & de C à D, dont la Raiſon de B à D eſt compoſée; il eſt aiſé de conclure par les remarques qui ont été faites dans la *Déf.* 10. que la Raiſon de A à C, eſt égale à celle de B à D, c'eſt à dire que les quatre quantitez A, C, B, D, ſont proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Raiſon Inverſe.

On démontrera de la même façon ce qu'Euclide démontre aprés la *Prop.* 4. que nous n'avons point icy miſe, ſçavoir que ſi les quatre quantitez A, B, C, D, ſont proportionnelles, auſſi les quatre B, A, D, C, ſont proportionnelles, ce qui s'appelle *Raiſon Inverſe*, où l'on compare le Conſequent à l'Antecedent; parce que les Grandeurs A, B, C, D, étant proportionnelles, le produit AD des deux extrémes eſt égal au produit BC des deux moyennes, *par Lem.* 1. & que *par Lem.* 2. les quatre quantitez B, A, D, C, ſont auſſi proportionnelles.

PROPOSITION XVII.

THEOREME XVII.

Diviſion de Raiſon.

Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, en diviſant elles ſeront auſſi proportionnelles.

On appelle *Diviſion de Raiſon*, lorſque dans une Proportion, à la place de chaque Antecedent, on met l'excez de cet Antecedent ſur ſon Conſequent, & alors la Proportion ſubſiſte toûjours, comme nous allons démontrer.

Je dis donc que ſi les quatre quantitez ad, a, bd, b, ſont proportionnelles, comme elles le ſont effectivement, comme il eſt évident *par Déf.* 6. & auſſi *par Lem.* 2. c'eſt à dire que s'il y a même Raiſon de ad, à a, que de bd, à b, en diviſant il y aura auſſi même Raiſon de ad a, à a, que de $bd-b$, à b.

DEMONSTRATION.

Parce que des quatre quantitez *ad—a*, *a*, *bd—b*, *b*, en multipliant ensemble les deux extrémes *ad—a*, *b*, & aussi ensemble les deux moyennes *a*, *bd—b*, il vient un même produit, sçavoir *abd—ab*, il s'ensuit *par Lem*. 2. que ces quatre quantitez *ad—a*, *a*, *bd—b*, *b*, sont proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Conversion de Raison.

La Division de Raison ainsi définie suppose que l'Antecedent est plus grand que son Consequent : & comme il peut être plus petit, auquel cas il semble que la Division de Raison ne puisse pas avoir lieu, il la faut définir plus généralement, en prenant au lieu de l'excés, la difference entre l'Antecedent & son Consequent, & si on la compare à l'Antecedent, ce qui s'appelle, *Conversion de Raison*, on démontrera de la même façon, que la Proportion subsiste toûjours.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVIII.

Composition de Raison.

Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, en composant, elles seront aussi proportionnelles.

On appelle *Composition de Raison*, lorsque dans une Proportion, à la place de chaque Antecedent, on met la somme de cet Antecedent & de son Consequent, & alors la Proportion subsiste toûjours, comme nous allons démontrer.

Je dis donc que si les quatre quantitez *a*, *ad*, *b*, *bd*, sont proportionnelles, comme elles le sont effectivement, comme il est évident *par Déf.* 6. & aussi *par Lem.* 2. c'est à dire que s'il y a même Raison de *a*, à *ad*, que de *b*, à *bd*, en composant, il y aura aussi même Raison de *a+ad*, à *ad*, que de *b+bd*, à *bd*.

DEMONSTRATION.

Parce que des quatre Grandeurs *a+ad*, *ad*, *b+bd*,

bd, en multipliant ensemble les deux extrémes *a* + *ad*, *bd*, & aussi ensemble les deux moyennes *ad*, *b* + *bd*, il vient un même produit, sçavoir *abd* + *abdd*, il s'ensuit *par Lem.* 2. que ces quatre Grandeurs *a* + *ad*, *ad*, *b*+*bd*, *bd*, sont proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut aussi mettre à la place de chaque Consequent, la somme de ce Consequent & de son Antecedent, pour la comparer à l'Antecedent, & démontrer de la même façon que la Proportion subsiste toûjours : ce qu'Euclide démontre par une Consequence tirée de la *Prop.* 19. laquelle ainsi est inutile, aussi-bien que les *Prop.* 20. & 21. lesquelles par consequent nous omettrons.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 24, & aussi pour démontrer la *Prop.* 31 6.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XXII.

Raison d'égalité avec ordre.

S'il y a un certain nombre de Grandeurs d'une part qui soient en Proportion ordonnée, *avec un pareil nombre de Grandeurs d'une autre part, la Raison des deux extrémes d'une part, est égale à celle des deux extrémes de l'autre part.*

On appelle en général *Raison d'Egalité*, lorsque plusieurs quantitez d'une part sont proportionnelles à autant d'autres d'une autre part : & en particulier on appelle *Raison d'Egalité avec Ordre*, ou *Proportion bien rangée*, ou *Proportion Ordonnée*, lorsque la premiere Grandeur d'une part, est à la seconde, comme la premiere de l'autre part est à la seconde, & que pareillement la seconde du premier ordre est à la troisiéme, comme la deuxiéme du second ordre est à la troisiéme, & ainsi ensuite.

A. 2. B. 3. C. 4. Comme si l'on a d'une part, ces trois
D. 8. E. 12. F. 16. Grandeurs A, B, C, & d'une autre part ces trois autres Grandeurs D, E, F, en sorte que A soit à B, comme D est à E, & que B soit à C, comme E est à F. Dans ce cas je dis que A est à C, comme D est à F.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de A, à C, est composée des Raisons de A, à B, & de B, à C, & que la Raison de D, à F, est composée des Raisons de D, à E, & de E, à F, lesquelles étant *par supp.* égales aux deux Raisons de A, à B, & de B, à C, il s'ensuit que les deux Raisons de A, à C, & de D, à F, sont composées de semblables Raisons, & par consequent égales. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer la *Prop.* 18. 6. & plusieurs autres beaux Theorêmes de Geometrie, comme le *Lem.*4. *de nôtre Gnomonique.*

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXIII.

Raison d'Egalite sans ordre.

S'il y a un certain nombre de Grandeurs d'une part, qui soient en Proportion troublée, *avec un pareil nombre de Grandeurs d'une autre part, la Raison des deux extrémes d'une part, est égale à celle des deux extrémes de l'autre part.*

ON appelle *Raison d'Egalité sans ordre*, ou *Proportion mal rangée* ou *Proportion troublée*, lorsque plusieurs quantitez d'une part sont proportionnelles à autant d'autres quantitez d'une autre part, en sorte que la premiere d'une part soit à la seconde, comme la penultiéme de l'autre part à la derniere, & que la seconde du premier ordre soit à la troisiéme, comme l'antepenultiéme du second ordre à la penultiéme, & ainsi ensuite jusqu'à la premiere du second ordre.

A. 2. B. 4. C. 1. Comme si l'on a d'une
D. 12. E. 3. F. 6. part ces trois Grandeurs A, B, C, & d'une autre part ces trois autres Grandeurs D, E, F, en sorte que A soit à B, comme E est à F, & que B soit à C, comme D est à E. Dans ce cas je dis que A est à C, comme D est à F.

DE

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison de A, à C, est composée des Raisons de A, à B, & de B, à C, & que la Raison de D, à F, est composée de la Raison de D à E, égale à celle de B à C, *par supp.* & de la Raison de E à F, égale à celle de A à B, il s'ensuit par les remarques de la *Déf.* 10. que la Raison de A à C est égale à celle de D, à F. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

On se sert de cette Proposition dans la *Trigonometrie Spherique*, pour démontrer que *dans un triangle Spherique les sinus des angles sont proportionnels aux sinus de leurs côtez opposez*; & l'on peut aussi s'en servir dans la *Trigonometrie rectiligne*, pour démontrer que *dans un triangle rectiligne les sinus des angles sont proportionnels à leurs côtez opposez.* Cette Proposition sert aussi pour démontrer la *Prop.* 24.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXIV.

Si de six Grandeurs la premiere est à la seconde, comme la troisiéme est à la quatriéme: & la cinquiéme à la seconde, comme la sixiéme à la quatriéme; la somme de la premiere & de la cinquiéme sera à la seconde, comme la somme de la troisiéme & de la sixiéme à la quatriéme.

A. 2. B 3. :: C. 4. D. 6.
E. 8. B 3. :: F. 16. D. 6.

JE dis que si des six grandeurs A, B, C, D, E, F, il y a même Raison de la premiere A, à la seconde B, que de la troisiéme C à la quatriéme D; & même Raison de la cinquiéme E, à la seconde B, que de la sixiéme F, à la quatriéme D; la somme A+E de la premiere & de la cinquiéme est à la seconde B, comme la somme C+F de la troisiéme & de la sixiéme à la quatriéme D.

DEMONSTRATION.

Puisque *par supp.* la Raison de A à B, est égale à celle de C à D, l'Antecedent A, contiendra quelque partie aliquote que ce soit de son Consequent B, autant de fois que l'Antecedent C, contient une semblable partie aliquote de son Consequent B, *par Déf.* 5. & par la même Définition, l'on connoîtra que puisque *par supp.* la Raison de E à B, est semblable à celle de F à D, l'Antecedent E contiendra la même partie aliquote de son Consequent B, autant de fois que l'Antecedent F, contient une semblable partie aliquote de son Consequent D. C'est pourquoy la somme A + E des deux Antecedens A, E, contiendra une partie aliquote quelconque de leur Consequent commun B, autant de fois que la somme C + F des deux autres Consequens C, F, contient une semblable partie aliquote de leur Consequent commun D. Ainsi *par Déf.* 5. la Raison de A + E, à B, sera la même que celle de C + F, à D. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Cette Proposition se peut démontrer autrement & plus facilement en cette sorte. Puisque la Raison de E à B, est supposée égale à celle de F à D, on connoîtra par Raison Inverse, qu'il y a même Raison de B à E, que de D à F: & comme l'on suppose qu'il y a même Raison de A à B, que de C à D, nous avons d'une part ces trois Grandeurs A, B, E, & d'une autre part ces trois Grandeurs C, D, F, qui sont en Proportion Ordonnée avec les trois precedentes A, B, E; c'est pourquoy *par Prop.* 22. il y aura même Raison de A à E, que de C à F, & en composant *par Prop.* 18. il y aura même Raison de A + E, à E, que de C + F, à F. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-

PROPOSITION XXV.

THEOREME XXV.

De quatre Grandeurs proportionnelles, la somme des deux extrémes est plus grande que la somme des deux Moyennes.

JE dis que des quatre Grandeurs *ab*, *bd*, *ac*, *cd*, qui sont proportionnelles *par Lem.* 2. la somme *ab*+*cd* des deux extrémes, est plus grande que la somme *ac*+*bd*, des deux Moyennes.

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que la premiere *ab* soit plus grande que la troisiéme *ac*, en divisant chacune de ces deux Grandeurs inégales *ab*, *ac*, par *a* on connoîtra que la Grandeur *b* est plus grande que la quantité *c*, & si l'on multiplie chacune de ces deux Grandeurs inégales *b*, *c*, par la difference *a*—*d*, on connoîtra que le produit *ab*—*bd* est plus grand que le produit *ac*—*cd*, & enfin si à chacun de ces deux produits inégaux *ab*—*bd*, *ac*—*cd*, on ajoûte la somme *bd* + *cd* on connoîtra que la somme *ab*+*cd* est plus grande que la somme *ac*+*bd*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Si vous voulez une autre démonstration supposons que les quatre Grandeurs A, B, C, D, soient proportionnelles, & que la premiere A soit plus grande que la troisiéme C, auquel cas la seconde B sera aussi plus grande que la quatriéme D, *par Prop.* 14. Cela étant supposé, je dis que la somme A+D des deux extrémes est plus grande que la somme B+C des deux Moyennes.

DEMONSTRATION.

Puisque l'on suppose que les quatre Grandeurs A, B, C, D, sont proportionnelles, en divisant *par Prop.* 17. on connoîtra que les quatre A—B, B, C—D, D, sont aussi pro-

proportionnelles: & comme nous avons reconnu que la seconde B est plus grande que la quatriéme D, on conclurra *par Prop.* 14. que la premiere A—B est aussi plus grande que la troisiéme C—D; c'est pourquoy si à chacune de ces deux Grandeurs inégales A—B, C—D, on ajoûte la somme B+D, on connoîtra que la somme A+D est plus grande que la somme B+C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

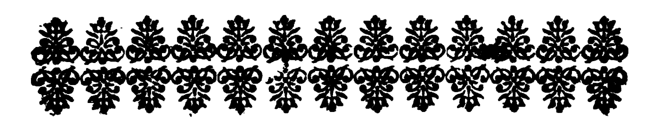
USAGE.

Cette Proposition sert pour faire voir la difference, qui est entre la Proportion Geometrique, & la Proportion Arithmetique, parce que de quatre quantitez en Proportion Arithmetique, la somme des deux extrémes est égale à la somme des deux moyennes, comme nous démontrerons dans nôtre Trigonometrie, lorsque nous parlerons des Logarithmes: au lieu que dans la Proportion Geometrique, la somme des deux extrémes est plus grande que la somme des deux Moyennes, comme il vient d'être démontré en deux façons.

Les Commentateurs d'Euclide ont icy ajoûté neuf Propositions que nous omettons, parce qu'elles ne sont pas d'Euclide, & qu'elles sont faciles à entendre par celuy qui aura bien entendu les precedentes.



LIVRE



LIVRE VI.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

APrés avoir expliqué en général les differentes sortes de proportions, Euclide commence dans ce Livre à en faire une juste application dans les Plans, & premierement dans les Triangles, en comparant leurs aires entre elles, & leurs côtez entre eux, & même leurs angles ensemble. Ce qui fait que ce Livre est le fondement de la construction & de l'usage de tous les Instrumens de Mathematique, comme du Graphometre, de l'Astrolabe, du Quarré Geometrique, de l'Arbalête, du Bâton de Jacob, de la Planchette, de l'Instrument Universel, & de tous les autres Instrumens qui servent à lever des Plans & aux mesurages : & encore de toutes les Machines, qui servent dans les Mecaniques pour les Forces Mouvantes, comme de la Balance, du Levier, de la Poulie, de l'Aissieu dans la Roüe, de la Vis, & de toutes les autres Machines tant simples que composées, qui peuvent servir pour augmenter les forces selon une Raison donnée.

DEFINITIONS.

I.

Les *Figures Rectilignes semblables* sont celles, qui ont tous les angles égaux, chacun au sien, & les côtez qui comprennent les angles égaux, proportionnels.

Ainsi

Planche 1. 1. Fig. *Ainsi on connoît que les deux Figures rectilignes ABC, BDE, sont semblables, parce que l'angle ABC, est égal à l'angle BDE, & l'angle BAC égal à l'angle DBE: & que le côté AB est au côté BC, comme le côté BD, au côté DE: & que pareillement le côté AB est au côté AC, comme le côté BD, au côté BE, &c.*

Si toutes les figures rectilignes étoient triangulaires, il suffiroit de dire qu'elles sont équiangles, pour dire qu'elles sont semblables, parce que nous démontrerons dans la *Prop.* 4. que les triangles équiangles ont les côtez proportionnels: ou bien il suffiroit de dire, que pour être semblables, ils ayent les côtez proportionnels, parce que les triangles qui ont les côtez proportionnels, sont équiangles, comme il sera démontré dans la *Prop.* 5.

II.

Les *Figures reciproques*, sont celles, dont les côtez se peuvent comparer de telle sorte que l'Antecedent d'une Raison, & le consequent de l'autre se trouvent dans la même figure. *Ainsi on connoît que les deux figures ABE, ACD, sont reciproques, parce que comme le côté AB est au côté AC, comme le côté AD, est au côté AE.*

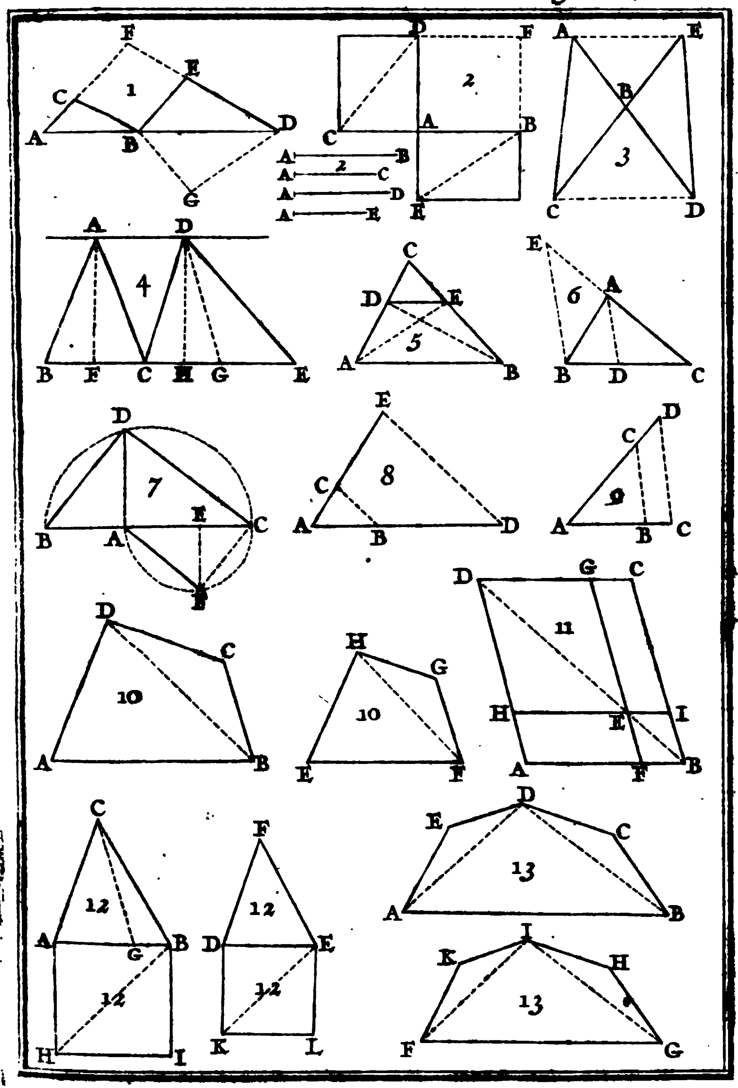
16. Fig.

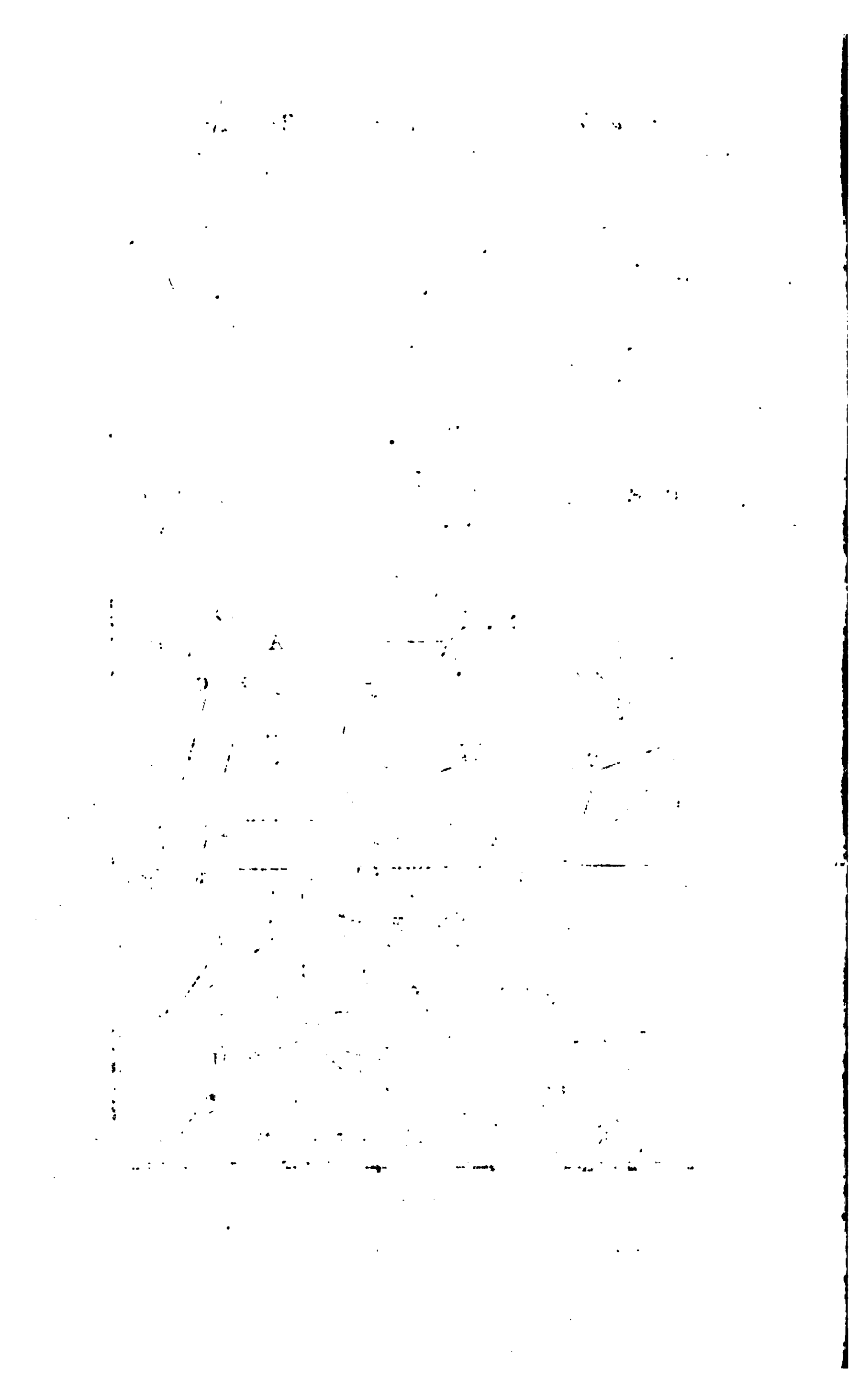
III.

Planche 2. 18. Fig. On dit qu'une ligne est coupée *par la Moyenne & extréme Raison*, lorsque toute la ligne est à sa plus grande partie, comme cette plus grande partie est à la plus petite. *Ainsi on connoîtra que la ligne AD est divisée au point B, par la Moyenne & extréme Raison, s'il y a même Raison de la ligne AD à sa plus grande partie AB, que de cette plus grande partie AB, à sa plus petite BD.*

Cette ligne a été ainsi appellée, parce que des trois proportionnelles AD, AB, BD, *la Raison extréme* est celle qui est entre les deux extrémes AD, BD, & que *la Raison Moyenne* est celle qui est entre la Toute AD, & la Moyenne AB, ou celle qui est entre la Moyenne AB, & l'autre extréme BD.

IV.





IV.

La *Hauteur d'une Figure* est une ligne droite tirée perpendiculairement du sommet à la base. *Ainsi on connoît que la Hauteur du triangle ABC, est la perpendiculaire AF, qui est tirée du sommet A sur la base BC: & que pareillement la hauteur du triangle CDE, est la perpendiculaire DH, qui est tirée du sommet D sur la base CE.* Planche 1. 4. Fig.

Il est évident que si deux triangles ou deux parallelogrammes de même hauteur, ont leurs bases dans une même ligne droite, & de même part, ils sont entre mêmes paralleles: & que s'ils sont entre mêmes paralleles, ils sont de même hauteur. Ainsi deux triangles, ou deux parallelogrammes, qui ont des hauteurs égales, peuvent être placez entre mêmes paralleles.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

Les Triangles & les Parallelogrammes de même hauteur, sont entre eux en même Raison que leurs bases.

JE dis premierement, que si les deux Triangles ABC, CDE, sont de même hauteur, ou sont entre les mêmes paralleles AD, BE, ils sont entre eux comme leurs bases, c'est à dire que le Triangle ABC, est au Triangle CDE, comme la base BC, à la base CE. 4. Fig.

PREPARATION.

Divisez en deux également chacune des deux bases BC, CE, aux points F, G, & menez les droites AF, DG: & alors on connoîtra *par* 38. 1. que les deux triangles FAC, FAB, sont égaux entre eux, aussi-bien que les deux GDC, GDE. D'où il suit que tout le triangle BAC est double de chacun des deux triangles égaux FAB, FAC, comme la base BC est double de chacune des deux bases égales FB, FC: & que pareillement

tout

Planche 1. 4. Fig. tout le triangle CDE est double de chacun des deux triangles égaux GDC, GDE, comme la base CE est double de chacune des deux bases égales GC, GE. D'où il est aisé de conclure *par* 15. 5. que la Raison de la base BC à sa moitié FC, est la même que celle du triangle BAC, à sa moitié FAC : & que pareillement la Raison de la Base CE, à sa moitié CG, est égale à celle du Triangle CDE, à sa moitié CDG.

DEMONSTRATION.

Cela étant supposé, on considerera que BC est à sa moitié FC, comme CE est à sa moitié CG : & que pareillement le triangle BAC, est à sa moitié FAC, comme le triangle CDE, est à sa moitié CDG, & que par consequent la proportion qui est entre les quatre lignes BC, FC, CE, CG, est semblable à la Proportion qui est entre les quatre triangles BAC, FAC, CDE, CDG : c'est pourquoy en changeant *par* 16. 5. on connoîtra à cause des hauteurs égales AF, DH, que la Proportion qui est entre les quatre lignes BC, CE, CF, CG, est égale à celle qui est entre les quatre triangles BAC, CDE, FAC, CDG. D'où il est aisé de conclure que dans cette seconde Proportion le premier triangle BAC, est au second CDE, comme la premiere ligne BC, à la seconde CE, dans la premiere Proportion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que les Parallelogrammes de même hauteur, sont en même Raison que leurs bases, parce que les Parallelogrammes étant doubles des triangles qui ont même base & même hauteur, *par* 41. 1. sont en même Raison que leurs bases, &c. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la suivante, & pour les *Prop.* 14. 15. & 19. & aussi pour démontrer que les triangles & les parallelogrammes, dont les bases sont égales, sont entre eux comme leurs hauteurs, parce que ces hauteurs peuvent être prises pour les bases, & les bases pour les hauteurs, ce qui est trop facile à comprendre pour en parler davantage.

PRO-

PROPOSITION II.

Planche 1. 5. Fig.

THEOREME II.

Une ligne droite tirée dans un Triangle parallelement à un de ses côtez, divise les deux autres côtez proportionnellement : & si elle divise deux côtez proportionnellement, elle sera parallele au troisiéme côté.

JE dis premierement que si au côté AB du triangle ABC, on tire la parallele DE, cette parallele DE divisera proportionnellement les deux autres côtez AC, BC, de sorte que la partie CD sera à la partie AD comme la partie CE, à la partie BE.

DEMONSTRATION.

En tirant les droites AE, BD, on connoîtra que les deux triangles CED, DEA, ayant un même sommet E, ont une même hauteur, & que *par Prop.* 1. Ils sont entre eux comme leurs bases CD, AD. On connoîtra de la même façon, que les deux triangles CDE, EDB, ayant un même sommet D, & par consequent une même hauteur, sont entre eux comme leurs bases CE, BE : & comme les deux triangles DEA, EDB, qui ont la même base DE, & qui sont entre les mêmes paralleles AB, DE sont égaux entre eux, *par* 37. il est aisé de conclure *par* 11. 5. que la Raison des parties CD, AD, est égale à celle des parties CE, BE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si la ligne DE coupe les deux côtez AC, BC, proportionnellement, elle est parallele au troisiéme côté AB.

DEMONSTRATION.

En joignant comme auparavant, les droites AE, BD, on considerera que puisque les quatre lignes CD, AD, CE, BE, sont proportionnelles, *par supp.* aussi les quatre triangles CED, DEA, CDE, EDB, sont

Planche 1. 5. Fig. sont proportionnels, *par Prop.* 1. & parce que les deux Antecedens CED, CDE, sont égaux, puisqu'ils representent un même triangle; aussi les Consequens DEA, EDB, sont égaux, *par* 14. 5. c'est pourquoy *par* 39. 1. la ligne DE sera parallele au côté AB. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & de la *Prop.* 4. & aussi pour démontrer que si dans un triangle on tire plusieurs lignes droites paralleles à un même côté, elles diviseront les deux autres côtez aussi proportionnellement.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

La ligne droite qui divise en deux également un angle d'un triangle, coupe le côté opposé en deux parties, qui sont en même raison que les deux autres côtez: & si elle divise un côté en deux parties proportionnelles aux deux autres côtez, elle divisera l'angle opposé en deux également.

6. Fig. JE dis premierement, que si la droite AD divise l'angle BAC du triangle ABC, en deux également, elle coupe le côté opposé BC, en deux parties BD, CD, qui sont dans la Raison des deux autres côtez AB, AC.

PREPARATION.

Prolongez l'un des deux côtez AB, AC, comme AC, en E en sorte que la ligne AE soit égale à l'autre côté AB, & joignez la droite BE.

DEMONSTRATION.

Parce que le triangle BAE est isoscéle *par constr.* l'angle E sera égal à l'angle ABE, *par* 5. 1. & parce que l'angle exterieur BAC, qui est double de l'angle BAD, est égal aux deux interieurs opposez E, ABE, *par* 32. 1.

il sera double de chacun, & par consequent de l'angle ABE. Ainsi les angles alternes BAD, ABE, seront égaux entre eux, & *par* 27. 1. la ligne AD sera parallele au côté BE du triangle BEC; & *par Prop.* 2. la Raison des deux parties BD, CD, sera égale à celle des deux parties AE, AC, ou des deux côtez AB, AC. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 1. 6. Fig.

Je dis en second lieu, que si la Raison des deux parties BD, CD, est égale à celle des deux côtez AB, AC; l'angle BAD, est égal à l'angle CAD.

DEMONSTRATION.

Ayant fait une construction semblable à la precedente, on connoîtra que puisque *par supp.* la Raison des deux lignes BD, CD, est égale à celle des deux AB, AC, ou AE, AC, la ligne AD est parallele au côté BE du triangle AEB, *par Prop.* 2. & que *par* 29. 1. l'angle BAD est égale à chacun des deux angles égaux E, ABE: & comme l'angle BAC est double de l'angle E, il sera aussi double de l'angle BAD, lequel par consequent sera égal à l'angle CAD. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition, pour diviser une ligne donnée en deux parties proportionnelles à deux autres lignes données, pourvû que la somme de ces deux lignes données, soit plus grande que la premiere. Comme pour couper la ligne BC en deux parties proportionnelles aux deux lignes données AB, AC, on fera de ces trois lignes données BC, AB, AC, le triangle BAC, *par* 22. 1. & *par* 19. 1. On divisera l'angle B en deux également, par la droite AG; &c.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Les Triangles équiangles ont les côtez proportionnels.

JE dis que si les deux triangles ABC, BDE sont équiangles, en sorte que l'angle A, soit égal à l'angle DBE, l'angle ABC égal à l'angle BDE, 1. Fig.

Planche. 1. 1. Fig. & par consequent le troisiéme angle ACB égal au troisiéme angle BED ; la Raison des deux côtez AB, BD, qui sont opposez à angles égaux, sera égale à celle des deux côtez BC, DE, qui sont opposez à angles égaux : & que pareillement la Raison des deux côtez AB, AD, qui sont opposez à angles égaux est égale à celle des deux côtez AC, BE, qui sont opposez à angles égaux.

PREPARATION.

Ayant disposé par pensée les deux triangles ABC, BDE, en sorte que deux côtez opposez à angles égaux, comme AB, BD, se joignent par l'une de leurs extremitez en ligne droite, prolongez les deux côtez AC, DE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point, comme F.

DEMONSTRATION.

Parce que ABD est une ligne droite, *par constr.* & que l'angle ADF est égal à l'angle ABC, *par supp.* la ligne BC sera parallele à la ligne DF, *par* 28. 1. & pareillement parce que l'angle A est égal à l'angle DBE, la ligne BE sera parallele à la ligne AF. Ainsi la figure BCFE est un Parallelogramme, dont les deux côtez opposez BC, EF sont égaux entre eux, *par* 34. 1. aussi-bien que les deux opposez BE, CF, & dans le triangle ADF, la ligne BC étant parallele au côté DF, la Raison de AB à BD, sera égale à celle de AC à CF, ou BE, *par Prop.* 2. & pareillement la ligne BE étant parallele au côté AF, la Raison des deux lignes AB, BD, est égale à celle des deux EF, ou BC & DE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Il est évident *par* 11. 5. que la Raison des deux côtez AC, BE, opposez à angles égaux, est aussi égale à celle des deux côtez BC, DE opposez à angles égaux, parce que chacune de ces deux Raisons a été démontrée égale à celle de AB à BD.

Il est évident aussi *par* 16. 5. que les côtez qui comprennent des angles égaux dans chaque triangle, sont proportionnels, c'est

c'est à dire par exemple, que la Raison des deux côtez AB, AC, est égale à celle des deux BD, BE, parce qu'il a été démontré que les quatre côtez AB, BD, AC, BE, sont proportionnels, ce qui fait que par échange les quatre côtez AB, AC, BD, BE, sont aussi proportionnels. D'où il suit *par Déf.* 1. que les triangles équiangles sont semblables. Planche 1. 1. Fig.

USAGE.

Cette Proposition n'est pas seulement necessaire pour les suivantes, mais encore elle est le fondement des principales pratiques de la Trigonometrie, & de l'Usage de l'Instrument Universel, où l'on décrit de petits triangles semblables à ceux que l'on s'imagine sur le terrain, lorsqu'on s'en sert pour mesurer quelque ligne inaccessible, ou pour lever un Plan, ou bien pour le tracer sur la terre. Elle est aussi le fondement de l'Usage du Compas de proportion, comme l'on peut voir dans le Traité que nous en avons autrefois publié, où les démonstrations sont fondées sur cette Proposition.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Les Triangles qui ont les côtez proportionnels sont équiangles.

JE dis que si des deux Triangles ABC, BDE, le côté AB est au côté BC, comme le côté BD au côté DE : & le côté AB, au côté AC, comme le côté BD, au côté BE ; ces deux Triangles ABC, BDE sont équiangles, de sorte que l'angle ABC est égal à l'angle BDE, l'angle A à l'angle DBE, & par consequent le troisiéme angle ACB égal au troisiéme angle BED. Planche 1. 1. Fig.

PREPARATION.

Faites, *par* 23. 1. à l'extremité B, du côté BD, l'angle DBG égal à l'angle A, & à l'autre extremité D, l'angle BDG égal à l'angle ABC.

Planche 1. 3. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles ABC, BGD, sont équiangles, *par constr.* il y aura même Raison de AB à BC, que de BD à DG, *par Prop.* 4. & parce qu'il y a aussi même Raison de AB, à BC, que de BD à DE, *par supp.* il s'ensuit *par* 11. 5. que la Raison de BD à DG, est égale à celle de BD, à DE, & *par* 14. 5. que le côté DE est égal au côté DG. De même il y aura même Raison de AB à AC, que de BD à BG, & comme l'on suppose qu'il y a aussi même Raison de AB à AC, que de BD, à BE, la Raison de BD à BG, sera semblable à celle de BD, à BE, & le côté BG sera égal au côté BE: c'est pourquoy, *par* 8. 1. le triangle BDE sera équiangle au triangle BDG, & par consequent au triangle ABC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

La Pratique que nous avons enseignée au *Probl.* 16. *Introd.* pour lever un Plan accessible sur la terre, est fondée sur cette Proposition, laquelle a beaucoup de ressemblance avec la huitiéme Proposition du premier Livre, laquelle sert aussi pour la démonstration de celle-cy, comme vous avez vû: car comme *par* 8. 1. on connoît que quand deux Triangles ont les côtez égaux, ils sont égaux entre eux & équiangles, on connoît de même par celle-cy, que quand deux Triangles ont les côtez proportionnels, ils sont équiangles. D'où il suit *par Déf.* qu'ils sont aussi semblables.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Les Triangles qui ont les côtez proportionnels autour d'un angle égal, sont équiangles.

1. Fig. JE dis que si l'angle A, du Triangle ABC, est égal à l'angle B du Triangle BDE, & que les deux côtez AB, AC, soient proportionnels aux deux BD, BE; le Triangle ABC est équiangle au Triangle BDE.

PREPARATION.

Faites, *par* 23. 1. à l'extremité B, du côté BD, l'angle DBG égal à l'angle A, ou à l'angle DBE, qui est supposé égal à l'angle A, & à l'autre extremité D, l'angle BDG égal à l'angle ABC. Planche 11, 1. Fig.

DEMONSTRATION.

Parceque les Triangles ABC, BGD, sont équiangles, *par constr.* la Raison des deux côtez AB, BC, sera égale à celle des deux BD, BG, *par Prop.* 4. & parce que la Raison des deux mêmes côtez AB, AC, est aussi égale à celle des deux BD, BE, *par supp.* il s'ensuit *par* 11. 5. que la Raison de BD à BG, est égale à celle de BD à BE, & *par* 14. 5. que le côté BG est égal au côté BE : c'est pourquoy par 4. 1. le Triangle BDE sera équiangle au Triangle BDG, & par consequent au Triangle ABC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

La démonstration de la *Prop.* 20. dépend de celle-cy, laquelle a beaucoup de ressemblance avec la quatriéme Proposition du premier Livre, que nous avons employée pour la démonstration de celle-cy; car comme *par* 4. 1. on connoît que quand deux Triangles, ont deux côtez égaux, & l'angle compris égal, ils sont égaux entre eux & équiangles, on connoît de même par celle-cy, que lorsque deux Triangles ont deux côtez proportionnels à deux côtez, & l'angle compris égal, ils sont équiangles. D'où il suit *pat Prop.* 4. qu'ils sont aussi semblables.

La Prop VII. *n'est pas necessaire.*

Planche. 1. 7. Fig.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

La perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un Triangle rectangle sur le côté opposé, divise le Triangle en deux Triangles, qui luy sont semblables.

JE dis, que si de l'angle droit D, du triangle rectangle BDC, on tire la droite DA, perpendiculaire au côté opposé BC, qu'on appelle *Hypotenuse*, chacun des deux triangles rectangles DAB, DAC; sera semblable au proposé BDC, de sorte que l'angle ADC sera égal à l'angle B, & l'angle ACD égal à l'angle ABD.

DEMONSTRATION.

Parce que l'angle A du triangle ABD est droit, *par supp.* la somme des deux autres B, ADB, vaudra *par* 32. 1. encore un droit, & sera par consequent égale à l'angle BDC, qui est droit, *par supp.* C'est pourquoy si l'on ôte l'angle commun ADB, il restera l'angle B, égal à l'angle ADC. Pareillement parce que l'angle A du triangle ACD est droit, la somme des deux autres C, ADC, vaudra autant qu'un droit, c'est à dire autant que l'angle BDC; c'est pourquoy en ôtant l'angle commun ADC, on aura l'angle C égal à l'angle ADB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour trouver entre deux lignes données une moyenne proportionnelle, comme il sera enseigné dans la *Prop.* 13. parce que la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux parties ou Segmens AB, AC, à cause de la similitude des triangles ADB, ADC, où l'on connoît *par Prop.* 4. que les deux côtez AB, AD du triangle ABD, sont proportionnels aux deux AD, AC, du triangle ADC. D'où l'on tire une maniere aisée de mesurer par le moyen d'une Equierre, une ligne droite accessible seulement par l'une de ses deux extremitez, comme seroit AC, que je suppose accessible par son extremité

mité A, où ayant élevé à angles droits un Bâton AD d'une grandeur connuë, & ayant mis l'angle droit d'une Equierre au point D, en sorte que regardant par l'un de ses côtez DC, on apperçoive le point C, & par son autre côté DC un autre point, comme B, on connoîtra que puisque les trois lignes AB, AD, AC, sont proportionnelles, on doit multiplier la longueur du Bâton AD par elle-même, & diviser le produit par la quantité de la ligne AB, pour avoir celle de la ligne AC qu'on cherche. Planche 11. 7. Fig.

PROPOSITION IX.

PROBLEME I.

Couper la partie qu'on voudra d'une ligne donnée.

POur retrancher de la ligne donnée AD, par exemple une troisiéme partie, tirez la ligne AE à volonté, & y ayant pris la ligne AC d'une longueur volontaire prenez la ligne AE triple de AC, & tirez par le point C, à la ligne DE, la parallele, BC, qui retranchera la ligne AB égale à la troisiéme partie de la proposée AD. 8. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes BC, DE, sont paralleles, l'angle ABC sera égal à l'angle ADE, *par* 29. 1. & à cause de l'angle commun A, le triangle ABC sera équiangle au triangle ADE, *par* 32. 1. C'est pourquoy *par Prop.* 4. la Raison des lignes AE, AC, sera égale à celle des lignes AD, AB: & comme AE est triple de AC, *par constr.* aussi AD sera triple de AB. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition, pour diviser une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra: car il est évident que pour diviser la ligne donnée AD, en trois parties égales, par exemple, il n'y a qu'à en retrancher la troisiéme partie AB, comme il vient d'être fait, &c.

Planche I.

PROPOSITION X.

PROBLEME II.

Diviser une ligne donnée de même façon qu'une autre ligne donnée est divisée.

8. Fig. POur diviser la ligne donnée AD au point B de la même façon que la ligne donnée AE est divisée en C, en sorte que la Raison des deux parties AB, BD, soit égale à celle des deux AC, CE; joignez les deux lignes données AD, AE, à tel angle qu'il vous plaira, comme DAE, & ayant joint la droite DE, tirez par le point C la droite BC parallele à la ligne DE, & les deux parties AB, BD, seront proportionnelles aux deux AC, CE.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne BC est parallele au côté DE du triangle ADE, *par constr.* la Raison des deux parties AB, BD, sera *par Prop.* 2. égale à celle des deux AC, CE. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

On peut aussi se servir tres-utilement de cette Proposition, pour diviser une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra : car il est évident, que si les deux parties AC, CE, étoient égales entre elles, aussi les deux AB, BD, seroient égales entre elles. Voyez *Probl.* 14. *Introd.*

PROPOSITION XI.

PROBLEME III.

Trouver à deux lignes données une troisiéme proportionnelle.

9. Fig. POur trouver aux deux lignes données AB, AC, une troisiéme proportionnelle, faites de ces deux lignes données un angle quelconque BAC, & ayant mis la lon-

longueur de la seconde ligne donnée AC, sur la premiere AB, depuis A en C, joignez la droite BC, & luy tirez la parallele CD, & la ligne AD, sera troisiéme proportionnelle aux deux lignes données AB, AC. Planche 1. 9. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux triangles ABC, ACD, sont équiangles, comme nous avons reconnu dans la *Prop.* 9. la Raison des deux côtez AB, AC, du triangle ABC, sera semblable à celle des deux côtez AC, AD, du triangle ACD, *par Prop.* 4. Ainsi la ligne AD, sera troisiéme proportionnelle aux deux AB, AC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition, pour reduire un Quârré donné en un Rectangle, dont la hauteur soit donnée: sçavoir en cherchant à la hauteur donnée, & au côté du Quarré donné une ligne troisiéme proportionnelle, qui sera la base du Rectangle qu'on cherche, comme il est évident *par Prop.* 17. Cette Proposition est aussi utile pour la démonstration de la *Prop.* 19.

PROPOSITION XII.

PROBLEME IV.

Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatriéme proportionnelle, faites des deux premieres AB, AC, un angle quelconque BAC, & ayant joint la droite BC, mettez sur la premiere AB, la longueur de la troisiéme ligne donnée AD, depuis A en D, & tirez du point D, à la ligne BC, la parallele DE, & la ligne AE, sera quatriéme proportionnelle aux trois lignes données AB, AC, AD. 8. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne BC est parallele à la ligne DE,

Planche I. 8. Fig. *par constr.* le triangle ABC sera équiangle au triangle ADE, comme nous avons reconnu dans la *Prop.* 9. C'est pourquoy *par Prop.* 4. les quatre lignes AB, AC, AD, AE, seront proportionnelles. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition peut servir pour reduire un Rectangle donné en un autre, dont la hauteur soit donnée, sçavoir en cherchant à la hauteur donnée, & aux deux côtez du Rectangle donné une ligne quatriéme proportionnelle, qui sera la base du Rectangle qu'on cherche, comme il est évident *par Prop.* 16.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME V.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

7. Fig. POur trouver entre les deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle, faites de ces deux lignes données AB, AC, la ligne droite BC, autour de laquelle il faudra décrire le demi-cercle ADC, & tirer du point A, sur la ligne BC, la perpendiculaire, AD, qui sera moyenne proportionnelle entre les deux AB, AC.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint les droites BD, CD, on connoîtra *par* 31. 3. que l'angle BDC est droit, & *par Prop.* 8. que la ligne AD est moyenne proportionnelle entre les deux AB, AD. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

SCOLIE.

Si le papier n'est pas assez long, pour faire une ligne droite des deux lignes proposées AB, AC, retranchez de la plus grande AC, la partie AE égale à la plus petite AB, & ayant décrit autour de AC, le demi-cercle AFC, tirez du point E, la droite EF perpendiculaire à la même ligne AC, & joignez la droite AF, qui sera moyenne proportionnelle entre les deux proposées AB, AC.

DEMONSTRATION. Planche I. 7. Fig.

En joignant la droite CF, on connoîtra *par* 31. 3. que l'angle AFC est droit; & *par Prop* 8, que les deux triangles rectangles FEA, FEC, sont équiangles au grand AFC: c'est pourquoy *par Prop.* 4. la Raison des deux côtez AC, AF, du triangle AFC, est égale à celle des deux côtez AF, AE, du triangle AEF, où l'on void que la ligne AF est moyenne proportionnelle entre les deux AC, & AE, ou AB, son égale. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* Voyez la *Prop.* 17.

USAGE.

Comme la Proposition precedente sert pour pratiquer en lignes la Regle de Trois, de même celle-cy peut servir pour trouver en lignes la Racine quarrée d'un nombre proposé, sçavoir en cherchant entre le nombre proposé & l'unité une moyenne proportionnelle, qui sera la Racine qu'on cherche *par Prop.* 17.

PROPOSITION XIV.

THEOREME IX.

Les Parallelogrammes équiangles & égaux sont Reciproques : & les Parallelogrammes Reciproques équiangles sont égaux.

JE dis premierement que si les Parallelogrammes ACD, ABE, sont équiangles & égaux, ils sont reciproques, c'est à dire que le côté AC est au côté AB, comme le côté AE au côté AD. 2. Fig.

PREPARATION.

Ayant disposé par pensée les deux Parallelogrammes ACD, ABE, en sorte que les deux côtez AB, AC, soient en ligne droite, auquel cas les deux autres côtez AD, AE, seront aussi en ligne droite, *par* 14. 1. parce que l'angle CAD est égal à l'angle BAE, *par sup.* prolongez les autres côtez jusqu'à ce qu'ils se coupent en F, & qu'ainsi ils fassent le Parallelogramme AF.

Planche I. 8. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les Parallelogrammes CD, BE, sont égaux, *par supp.* ils auront une même Raison au Parallelogramme AF, *par* 7. 5. & parce que *par Prop.* 1. le Parallelogramme CD est au Parallelogramme AF, comme la base AC, à la base AB, & que pareillement le Parallelogramme BE est au Parallelogramme BD, comme la base AE, à la base AD, il s'ensuit que la Raison des deux lignes AC, AB, est égale à celle des deux AE, AD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si les Parallelogrammes ACD, ABE, sont équiangles & reciproques, ils sont égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

Si l'on fait une construction semblable à la precedente, on connoîtra *par Prop.* 1. que puisque la Raison de AC à AB, est égale à celle de AE, à AD, *par supp.* Aussi la Raison du Parallelogramme ACD, au Parallelogramme AF, est egale à celle du Parallelogramme ABE, au même Parallelogramme AF, & que *par* 9. 5. les deux Parallelogrammes ACD, ABE, sont égaux entre eux. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la *Prop.* 16. & aussi pour la démonstration de cette Regle d'Arithmetique qu'on appelle *Regle de Trois indirecte.*

PROPOSITION XV.

THEOREME X.

Les Triangles égaux, qui ont un angle égal, ont les côtez autour de cet angle reciproquement proportionnels : & si les côtez sont reciproquement proportionnels, les Triangles sont égaux.

9. Fig. JE dis premierement, que si les deux Triangles ABC, DBE, sont égaux entre eux, & l'angle ABC égal à l'angle EBD, la Raison des deux côtez AB, BD est égale à celle des deux BE, BC.

PRE-

PREPARATION.

Planche 1. 3. Fig.

Disposez par pensée les deux Triangles ABC, EBD, ensorte que les deux côtez AB, BD, soient en ligne droite, auquel cas les deux BE, BC, feront aussi une ligne droite; *par* 14. 1. parce que l'angle ABC est égal à l'angle DBE, *par supp.* & joignez la droite AE.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles ABC, EBD, sont égaux, *par supp.* ils auront même Raison au triangle ABE, *par* 7. 5. & parce que *par Prop.* 1. le triangle ABE est au triangle EBD, comme la base AB est à la base BD, & que pareillement le triangle ABE est au Triangle ABC, comme la base BE, à la base BC, il s'ensuit que les quatre lignes AB, BD, BE, BC, sont proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si les deux angles ABC, EBD, sont égaux, & les côtez AB, BD, BE, BC, proportionnels, les Triangles ABC, EBD, sont égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

Si l'on fait une construction semblable à la precedente, on connoîtra *par Prop.* 1. que puisque la Raison de AB à BD, est égale à celle de BE à BC, *par supp.* Aussi la Raison du triangle ABE au triangle EBD est semblable à celle du triangle ABE, au triangle ABC, & que *par* 14. 5. les deux Triangles ABC, EBD, sont égaux entre eux. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert à la démonstration de la *Prop.* 19. & aussi pour démontrer que *deux lignes droites se coupent proportionnellement entre deux paralleles*, parce que si l'on joint la droite CD, elle sera parallele à la droite AE, *par* 39. 1. à cause du triangle ACD égal au triangle CED, &c.

PROPOSITION XVI.

Planche I.

THEOREME XI.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le Rectangle des deux extrémes est égal à celuy des deux moyennes : & si le Rectangle des deux extrémes est égal à celuy des deux moyennes, les quatre lignes sont proportionnelles.

2. Fig. JE dis premierement, que si les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles, le Rectangle ABE des deux extrémes AB, AE, est égal au Rectangle ACD, des deux moyennes AC, AD.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles, *par supp.* les Rectangles ABE, ACD, seront reciproques, *par Déf.* 2. & comme ils sont équiangles, *par constr.* il s'ensuit *par Prop.* 15. qu'ils sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

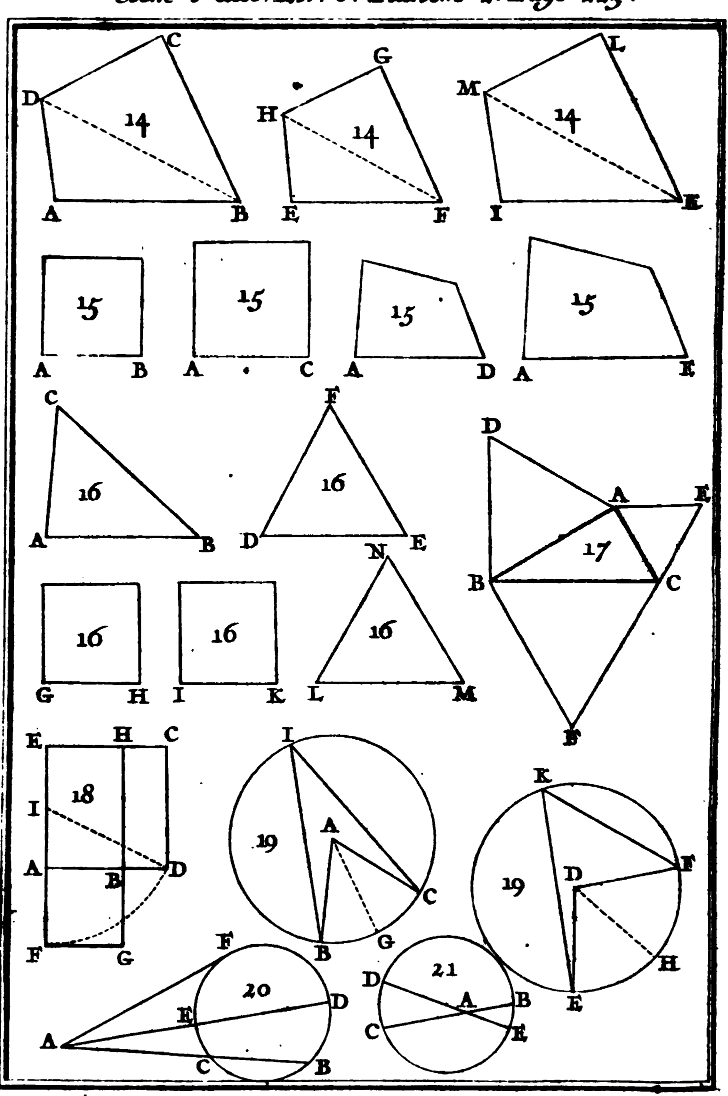
Je dis en second lieu, que si les Rectangles ACD, ABE, sont égaux entre eux, les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux Rectangles ACD, ABE, sont égaux entre eux, *par supp.* & qu'ils sont équiangles, *par constr.* ils sont reciproques *par Prop.* 14. c'est à dire *par Déf.* 2. que les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la Regle de Trois ; parce que l'aire d'un Rectangle se trouvant en multipliant ensemble les deux côtez qui font l'angle droit, comme nous avons reconnu dans le second Livre, on conclud aisément de cette Proposition, que de quatre quantitez proportionnelles, le produit des deux extrémes est égal à celuy


C
D
14
A
B
G
H
14
E
F
L
M
14
I
K
15
A
B
15
A
C
15
A
D
15
A
E
C
16
A
B
F
16
D
E
D
A
E
17
B
C
16
G
H
16
I
K
N
16
L
M
F
E
H
C
18
I
A
B
D
F
G
I
19
A
C
B
G
K
19
D
F
E
H
F
20
E
D
A
C
B
21
D
A
B
C
E

celuy des deux moyennes, & au contraire : ce que nous avons déja démontré par deux Lemmes au Livre precedent. Planche 18 2. Fig.

On démontre aussi par cette Proposition, que si deux lignes droites, se coupent en un point hors d'un Cercle, & rencontrent sa circonference, comme AB, AD, les toutes & leurs parties exterieures sont reciproquement proportionnelles, c'est à dire que la toute AB est à la toute AD, comme la partie AE, est à la partie AC, parce que le Rectangle des lignes AB, AC, est égal à celuy des lignes AD, AE, *par* 36. 3. Planche 21 20. Fig.

On démontre encore par cette Proposition, que si deux lignes droites se coupent dans un Cercle, comme BC, DE, leurs parties sont reciproquement proportionnelles, c'est à dire que la partie AB est à la partie AD, reciproquement comme la partie AE, est à la partie AC, parce que *par* 35. 3. le Rectangle des parties AB, AC, est égal à celuy des parties AD, AE. 21. Fig.

PROPOSITION XVII.

THEOREME XII.

Si trois lignes sont proportionnelles, le Quarré de la moyenne est égal au Rectangle des deux extrêmes : & si le Rectangle des deux extrêmes est égal au Quarré de la moyenne, les trois lignes sont proportionnelles.

CEtte Proposition est un Corollaire de la precedente, parce que trois lignes proportionnelles sont équivalentes à quatre, dont les deux moyennes sont égales, ce qui fait que le Rectangle de ces deux moyennes se change en Quarré.

USAGE.

Cette Proposition sert non-seulement pour la démonstration de la *Prop.* 30. mais encore pour démontrer, que si d'un point pris hors d'un Cercle, comme A, on tire la touchante AF, & la coupante AD, cette touchante AF est moyenne proportionnelle entre la coupante AD, & sa partie exterieure AE, parce que le Rectangle de ces deux lignes AD, AE, est égal au Quarré de la touchante AE, *par* 36. 3. Planche 2. 20. Fig.

D'où l'on tire une methode aisée pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, comme seroient AD, AE, sçavoir en décrivant autour de leur difference DE, une circonference de Cercle, & en tirant la touchante AF, qui sera la moyenne proportionnelle qu'on cherche.

PRO-

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME VI.

Décrire sur une ligne donnée un Polygone semblable à un Polygone donné.

Planche 1. 40. Fig. POur décrire sur la ligne donnée EF, un Polygone semblable au donné ABCD, tirez la Diagonale BD, & ayant fait l'angle E égal à l'angle A, faites aussi l'angle EFH égal à l'angle ABD. Faites encore l'angle FHG égal à l'angle BDC, & l'angle HFG égal à l'angle DBC, & la Figure EFGH sera semblable à la proposée ABCD, c'est à dire que tous les angles de l'une seront égaux à tous les angles de l'autre, & que leurs côtez seront proportionnels.

DEMONSTRATION.

Il est déja évident *par constr.* que les deux Polygones ABCD, EFGH, sont équiangles, parce que tous les triangles du Polygone ABCD, ont été faits équiangles à tous les triangles du Polygone EFGH. Ainsi il ne reste plus qu'à démontrer, que les côtez sont proportionnels.

Parce que les triangles ABD, EFH, sont équiangles *par constr.* il s'ensuit *par Prop.* 4. que les deux côtez AB, AD, sont proportionnels aux deux EF, EH : & de même parce que les deux triangles BCD, FGH, sont équiangles, les deux côtez BC, CD, sont proportionnels aux deux FG, GH. Mais je dis de plus, que les deux côtez AB, BC, sont proportionnels aux deux EF, FG, & les deux AD, CD, aux deux EH, GH, comme nous allons démontrer.

Parce que dans les deux triangles équiangles ABD, EFH, la Raison des deux côtez AB, BD, est semblable à celle des deux EF, FH, *par Prop.* 4. & que pareillement dans les triangles équiangles BCD, FGH, la Raison des deux côtez BD, BC, est égale à celle des deux FH, FG. On connoît que les trois lignes BA, BD, BC, sont en proportion bien rangée avec les trois lignes FE, FH, FG, & que

par

par 22. 5. la Raison des deux côtez AB, BC, est semblable à celle des deux EF, FG. *Ce qui est l'une des deux choses qu'il falloit démontrer.* Planche 1. 10. Fig.

De même dans les deux triangles équiangles ABD, EFH, la Raison des deux côtez AD, BD, est égale à celle des deux EH, FH : & pareillement dans les deux triangles équiangles BCD, FGH, la Raison des deux côtez BD, CD, est la même que celle des deux FH, GH. Ainsi on void que les trois lignes DA, DB, DC, sont en proportion bien rangée avec les trois HE, HF, HG, & que *par* 22. 5. la Raison des deux côtez AD, CD, est égale à celle des deux EH, GH. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition est le fondement de la pratique que nous avons enseignée au *Probl.* 17. *Introd.* pour lever un Plan inaccessible sur la terre : & aussi de la Methode dont on se sert ordinairement pour tracer sur le terrain le Plan d'une Forteresse, dont le dessein a été décrit sur le papier, car comme l'on ne peut pas travailler sur la terre comme sur le papier, il faut faire sur le terrain des angles égaux à ceux du Plan décrit sur le papier.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XIII.

Les Triangles équiangles sont en Raison doublée de celle de leurs côtez homologues.

ON appelle *Côtez homologues* les côtez de deux figures rectilignes semblables, qui sont opposez aux angles égaux : comme si les deux Triangles ABC, DEF, sont équiangles, & par consequent semblables, *par Prop.* 4. en sorte que l'angle A, soit égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, & par consequent le troisiéme angle C égal au troisiéme angle F ; les deux côtez AB, DE, qui sont opposez aux deux angles égaux C, F, sont *Homologues*. 11. Fig.

Cela étant supposé, je dis que la Raison des deux Triangles ABC, DEF, est doublée de celle des deux

Planche 5. 12. Fig. deux côtez homologues AB, DE: c'est à dire que si *par Prop.* 11. on trouve aux deux côtez homologues AB, DE, une ligne troisiéme proportionnelle AG, le triangle ABC est au triangle DEF, comme la premiere proportionnelle AB, à la troisiéme AG.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles ABC, DEF, sont équiangles, *par supp.* la Raison des deux côtez AC, DF, est égale à celle des deux AB, DE, laquelle est aussi égale à celle des deux DE, AG, *par constr.* parce que l'on a fait la ligne AG troisiéme proportionnelle aux deux AB, DE: c'est pourquoy *par* 11. 5. la Raison des deux côtez AC, DF, sera égale à celle des deux DE, AG, & à cause de l'angle A égal à l'angle D, *par supp.* le triangle ACG, sera égal au triangle DEF, *par Prop.* 15. & comme le triangle ABC est au triangle AGC, comme la base AB à la base AG, *par Prop.* 1. il s'ensuit que le triangle ABC est au triangle DEF, comme la premiere proportionnelle AB, à la troisiéme AG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que les Triangles équiangles sont comme les quarrez de leurs côtez homologues; comme icy le Triangle ABC est au Triangle DEF, comme le Quarré du côté AB, sçavoir AI, au Quarré DL du côté homologue DE; parce que ces deux Quarrez sont entre eux comme leurs moitiez, *par* 15. 5. & par consequent comme les triangles ABH, DEK, lesquels étant équiangles, *par* 4. 2. sont en Raison doublée de leurs côtez homologues AB, DE, comme les Triangles ABC, DEF.

USAGE.

Cette Proposition sert pour détromper ceux qui s'imaginent facilement que les figures semblables sont comme leurs côtez, étant certain que si les côtez de l'une sont par exemple doubles des côtez de l'autre, la plus grande sera quadruple de la plus petite, parce que la Raison doublée d'une double est quadruple.

PRO-

Planche. 13

PROPOSITION XX.

THEOREME XIV.

Les Polygones semblables se peuvent diviser en autant de Triangles semblables : & les Polygones semblables sont en Raison doublée de leurs côtez homologues.

JE dis premierement que si les Polygones ABGDE, FGHIK, sont semblables, ils se peuvent diviser en autant de Triangles qui seront semblables entre eux, & même qui seront semblables parties de leurs Polygones, chacun du sien. 13. Fig.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré les diagonales DA, DB, IF, IG; on connoîtra *par Prop.* 6. que les deux Triangles AED, FKI, sont semblables, à cause des angles égaux E, K, & des deux côtez EA, ED, proportionnels aux deux KF, KI, parce que l'on suppose que les deux Polygones proposez sont semblables. On connoîtra de la même façon que le Triangle BCD est semblable au Triangle GHI. D'où il sera aisé de conclure, que les deux autres Triangles ADB, FIG, sont aussi semblables, parce qu'ils sont équiangles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que les Polygones semblables ABCDE, FGHIK, sont en Raison doublée de leurs côtez homologues.

DEMONSTRATION.

Puisque ces deux Polygones sont composez de Triangles semblables, comme il a été démontré, & que tous ces Triangles sont en Raison doublée de leurs côtez homologues, *par Prop.* 19. & que de plus la Raison de ces côtez est la même, parce que les Polygones sont supposez semblables; la Raison doublée sera aussi la même, & ainsi chaque Triangle d'un Polygone sera à chaque Triangle de l'autre en même Raison, & *par* 12. 5. il y aura même Raison de chaque Triangle à son sembla-

Planche 1. 13. Fig. ble, que de la somme de tous les Triangles d'un Polygone, à la somme de tous les Triangles de l'autre Polygone, c'est à dire que d'un Polygone à l'autre: & parce que la Raison de ces deux Triangles est doublée de celle de leurs côtez homologues, il s'ensuit que les Polygones sont aussi en Raison doublée de celle de leurs côtez homologues. *Ce qui restoit à démontrer.*

COROLLAIRE

Il suit de cette Proposition, que les Polygones semblables sont comme les Quarrez de leurs côtez homologues: & que de trois lignes proportionnelles le Polygone décrit sur la premiere est au Polygone semblable décrit sur la deuxiéme, comme la premiere à la troisiéme, parce que cette Raison est doublée de celle de la premiere à la seconde, qui sont deux côtez homologues de ces deux Polygones.

USAGE.

Cette Proposition sert pour les *Prop.* 21. & 22. & aussi pour augmenter un Polygone donné selon une Raison donnée: comme si l'on veut un Polygone quadruple, on doublera tous les côtez, parce que la Raison doublée d'une double est quadruple: & pareillement si l'on veut un Polygone noncuple, on triplera tous les côtez, parce que la Raison doublée d'une triple est noncuple.

Il est évident qu'il faudroit faire tout le contraire si l'on vouloit diminuer un Polygone donné, de sorte que si l'on vouloit un Polygone qui ne fût par exemple que le quart du proposé, il faudroit prendre la moitié des côtez.

Que si l'on donne une autre Raison, par exemple celle de 2. à 3. il faudra chercher entre le double d'un côté du Polygone proposé, & son triple, une moyenne proportionnelle, qui sera le côté homologue du Polygone qu'on cherche, &c.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XV.

Deux Polygones qui sont semblables à un troisiéme Polygone, sont semblables entre eux.

Planche 2. 14. Fig. JE dis, que si chacun des deux Polygones ABCD, IKLM, est semblable au Polygone EFGH, ces deux Polygones ABCD, IKLM, sont semblables entre eux.

DE-

DEMONSTRATION.

Planche 2. 14. Fig.

Parce que les Polygones ABCD, EFGH, sont semblables *par supp.* ils se peuvent diviser par des diagonales en autant de triangles semblables l'un que l'autre, *par Prop.* 20. comme icy en deux, le triangle ABD, étant semblable au triangle IKM, & le triangle BCD au triangle FGH. Pareillement le Polygone IKLM étant supposé semblable au Polygone EFGH, le triangle IKM sera semblable au triangle EFH, & par consequent au triangle ABD, parce que deux angles qui sont égaux à un même, sont égaux entre eux : & pareillement le triangle KLM sera semblable au triangle FGH, & par consequent au triangle BCD. C'est pourquoy les Polygones ABCD, EFGH, étant composez d'autant de triangles équiangles l'un que l'autre, seront aussi équiangles, parce que leurs triangles semblables ayant leurs angles égaux les uns aux autres, les angles des Polygones qui en sont composez, seront aussi égaux : & parce que ces triangles équiangles ont les côtez proportionnels, *par Prop.* 4. les Polygones auront aussi les côtez proportionnels, & *par Déf.* 1. ils seront semblables. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXII.

THEOREME XVI.

Si quatre Lignes droites sont proportionnelles, les Polygones semblables décrits sur ces lignes, seront aussi proportionnels : & s'ils sont proportionnels, les quatre Lignes seront aussi proportionnelles.

JE dis premierement, que si les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles, les quatre Polygones semblables décrits sur ces lignes, par exemple deux Quarrez, & deux Trapezes, seront proportionnels. 15. Fig.

Planche 2 25. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles, *par supp.* la Raison doublée des deux premieres AB, AC; est la même que la Raison doublée des deux dernieres AD, AE : & comme *par Prop.* 20. la Raison doublée des deux premieres AB, AC, est égale à celle de leurs Polygones semblables, & que pareillement la Raison doublée des deux dernieres AD, AE, est égale à celle de leurs Polygones semblables, * il s'ensuit que ces quatre Polygones sont proportionnels. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si les quatre Polygones semblables décrits sur les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnels, ces quatre lignes seront aussi proportionnelles.

DEMONSTRATION.

Parce que la Raison des deux premiers Polygones est égale à celle des deux derniers, *par supp.* & que chacune est doublée de celle des deux côtez homologues, *par Prop.* 20. il s'ensuit que les quatre côtez homologues, & par consequent les quatre lignes AB, AC, AD, AE, sont proportionnelles. *Ce qui restoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour pratiquer la Regle de Trois par Geometrie lorsqu'il faut trouver à trois figures données une quatriéme proportionnelle, sçavoir en reduisant les trois figures proposées en trois quarrez, si elles ne sont pas semblables, & en cherchant aux côtez de ces trois Quarrez une quatriéme proportionnelle, qui sera le côté d'un Quarré égal à la quatriéme figure proportionnelle qu'on cherche. On se sert aussi de cette Proposition pour la démonstration de la 1. 11.

PRO-

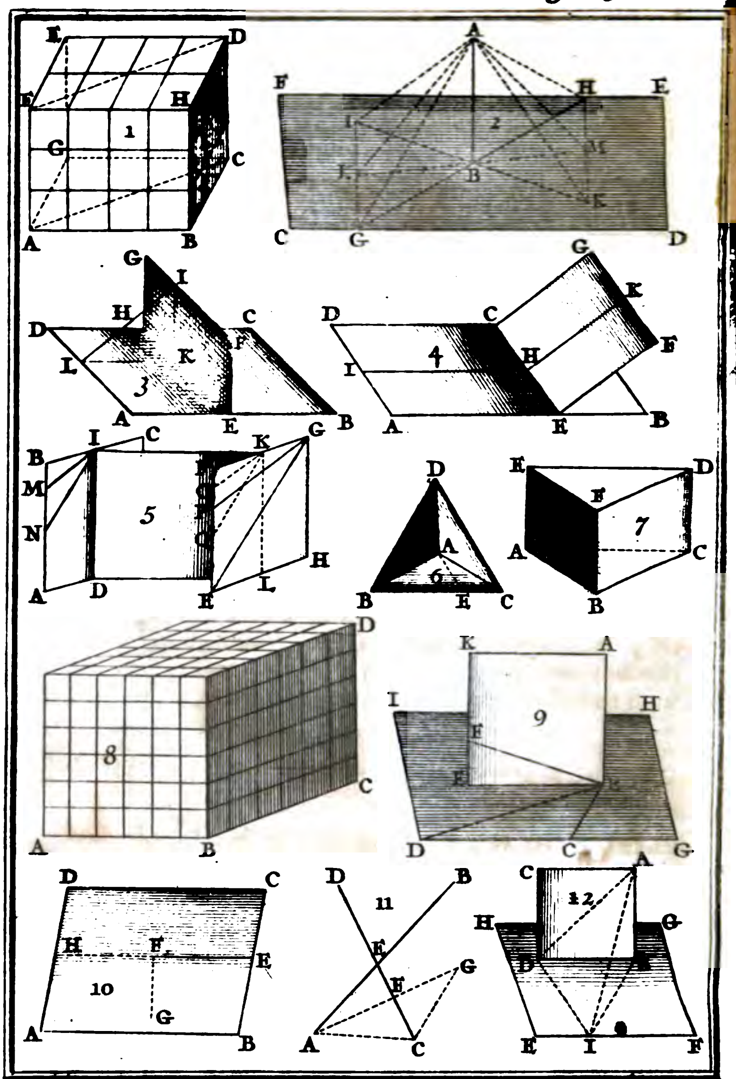

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Planche 1. 2. Fig.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XVII.

Les Parallelogrammes équiangles sont en Raison composée de celle de leurs côtez.

JE dis que si les deux Parallelogrammes ACD, ABE, sont équiangles, leur Raison est composée de la Raison du côté AC, au côté AB, & de la Raison du côté AD, au côté AE.

PREPARATION.

Ayant disposé par pensée les deux Parallelogrammes ACD, ABE, en sorte que les deux côtez AB, AC, soient en ligne droite, auquel cas les deux autres côtez AD, AE, seront aussi en ligne droite, *par* 14. 1. parce que l'angle CAD est égal à l'angle BAE ; prolongez les autres côtez jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en quelque point, comme F, & qu'ainsi ils fassent un troisiéme Parallelogramme AF.

DEMONSTRATION.

Parce que des trois Parallelogrammes ACD, AF, ABE, la Raison du premier au troisiéme est composée de la Raison du premier au second, laquelle est égale à celle de la base AC à la base AB, & de la Raison du second au troisiéme, laquelle est aussi égale à celle de la base AD à la base AE, il s'ensuit que la Raison du Parallelogramme ACD, au Parallelogramme ABE, est composée de la Raison du côté AC au côté AB, & de la Raison du côté AD, au côté AE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche. 1. 8. Fig.

SCOLIE.

Pour composer les Raisons de AC à AB, & de AD à AE, il faut multiplier ensemble les deux Antecedens AC, AD, & alors on aura le contenu du Parallelogramme ACD : & aussi ensemble les deux Consequens AB, AE, & alors on aura l'aire du Parallelogramme ABE, en des mesures semblables à celles du Parallelogramme ACD ; ce qui est un surcroit de démonstration, pour faire connoître que ces deux Parallelogrammes sont en Raison composée de leurs côtez.

Comme un Triangle est égal à la moitié d'un Parallelogramme de même base, & de même hauteur, on connoît aisément par cette Proposition, que deux Triangles qui ont un angle égal, sont en Raison composée des côtez qui forment cet angle, comme s'ils étoient des Parallelogrammes, ce qui se connoîtra plus facilement, si l'on tire les deux diagonales CD, BE, &c.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XVIII.

Si par un point de la Diagonale d'un Parallelogramme on tire deux lignes paralleles aux deux côtez, il se formera quatre Parallelogrammes, dont les deux par lesquels la Diagonale passe, sont semblables entre eux & au grand.

Planche 1 11. Fig.

JE dis que si par le point E pris à discretion sur la Diagonale BD du Parallelogramme ABCD, on tire les deux lignes FG, HI, paralleles aux deux côtez AD, AB. les deux Parallelogrammes GH, FI, sont semblables entre eux, & au grand ABCD.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne HI est parallele à AB, *par supp.* l'angle DHE sera égal à l'angle A, *par* 29. 1. ce qui rend semblables les deux triangles DHE, DAB : c'est pourquoy *par Prop.* 4. la Raison de DH à HE, sera égale à celle de AD, à AB, & *par Déf.* 1. le Parallelogramme GH sera semblable au Parallelogramme ABCD. On connoîtra de la même façon que le Parallelogramme

FI

FI est semblable au même Parallelogramme ABCD, & par consequent au Parallelogramme GH. *Ce qu'il falloit demontrer.* Planche 1. 11. Fig.

SCOLIE.

La Proposition inverse de ce Theorême est aussi veritable, sçavoir, que si le Parallelogramme GH, ou FI, est semblable au grand ABCD, avec lequel il a un angle commun, la Diagonale du grand tirée par l'angle commun, passera par l'autre angle du plus petit, comme Euclide démontre dans la *Prop.* 26. que nous negligerons, parce qu'elle est facile à comprendre, & qu'elle n'est pas d'un grand usage.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME VII.

Deux Rectilignes étant donnez, en décrire un troisiéme égal à l'un des deux donnez, & semblable à l'autre.

POur décrire un Rectiligne égal au donné ABC, & semblable au donné DEF, reduisez en Quarré chacun des deux Rectilignes donnez ABC, DEF, *par* 14. 2. en sorte que GH, soit le côté du Quarré égal au Rectiligne ABC, & IK, le côté du Quarré égal au Rectiligne DEF. Aprés cela cherchez *par Prop.* 12. aux trois lignes IK, GH, DE, une quatriéme proportionnelle LM, & *par Prop.* 18. décrivez sur cette ligne LM, le Rectiligne LMN semblable au Rectiligne DEF, lequel est icy un triangle équilateral, & ce Rectiligne LMN sera égal au Rectiligne ABC. Planche 11. 16. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes IK, GH, DE, LM, sont proportionnelles, *par constr.* leurs Quarrez seront aussi proportionnels, *par Prop* 22. & parce que les Quarrez des deux lignes DE, LM, sont en même Raison que les deux Rectilignes semblables DEF, LMN, *par Prop.* 20. on connoît que la Raison des Quarrez des deux lignes IK, GH, est égale à celle des deux Recti-

Planche 2. 16. Fig. Rectilignes DEF, LMN : & comme le Quarré de la ligne IK, est égal au Rectiligne DEF, *par constr.* il s'ensuit *par* 14. 5. que le Quarré de la ligne GH, ou le Rectiligne ABC, est égal au Rectiligne LMN. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USAGE.

L'Usage de cette Proposition est plus étendu que celuy de la *Prop.* 14. 2. où l'on ne peut reduire un Rectiligne proposé qu'en un Quarré, au lieu que par cette Proposition, on le peut reduire en telle autre figure que l'on voudra, comme icy nous avons reduit le Triangle scalene ABC en un triangle équilateral. Nous avons resolu ce Problême autrement qu'Euclide, parce que sa Methode dépend d'une Proposition du premier livre, que nous avons omise, pour nous avoir semblé trop embarassée.

Nous omettrons icy les Prop. XXVI. XXVII. XXVIII. & XXIX. *qui sont de petite consequence.*

PROPOSITION XXX.

PROBLEME X.

Couper une Ligne droite donnée par la moyenne & extréme Raison.

18. Fig. POur diviser la Ligne donnée AD, par la moyenne & extréme Raison, coupez-la au point B, *par* 11. 2 en telle sorte que le Rectangle de la toute AD, & de sa plus petite partie BD, sçavoir le Rectangle BC, soit égal au Quarré AG de la plus grande partie AB, & le Problême sera resolu.

DEMONSTRATION.

Parce que le Rectangle BC est égal au Quarré AG de la ligne AB, *par constr.* les trois lignes CD, ou AD, AB, BD, seront proportionnelles, *par* *Prop.* 17. & *par Déf.* 3. la ligne AD, sera coupée au point B, par la moyenne & extréme Raison. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

USA-

USAGE.

Planche 2. 18. Fig.

Cette ligne ainsi coupée a plusieurs proprietez, que l'on peut voir dans le Livre qui en a été composé par le Frere Lucas de saint Sepulchre, & elle sert comme vous avez vû, à la description du Pentagone & du Decagone regulier, & Euclide s'en sert dans le treiziéme Livre pour déterminer les côtez des cinq Corps reguliers.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXI.

Si sur les trois côtez d'un Triangle Rectangle on décrit trois Rectilignes semblables, celuy qui est décrit sur le côté opposé à l'angle droit, est égal à la somme des deux autres.

JE dis, que si sur les trois côtez du Triangle ABC rectangle en A, on décrit trois Rectilignes semblables, par exemple les trois triangles ABD, ACE, BCF, le triangle BCF, est égal à la somme des deux ABD, ACE. 17. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que *par Prop.* 20. le Rectiligne ABD, est au Rectiligne ACE, comme le Quarré AB, au Quarré AC, en composant *par* 18. 5. la somme ABD+ACE, sera à ACE, comme la somme des deux Quarrez AB, AC, c'est à dire *par.* 47. 1. comme le Quarré BC, au Quarré AC: & parce que la Raison du Quarré BC au Quarré AC, est égale à celle du Rectiligne BCF, à son semblable ACE, *par Prop.* 20. on connoît *par* 11. 5. que la Raison du Rectiligne BCF, au Rectiligne ACE, est égale à celle de la somme ACD+ACE, au même Rectiligne ACE, & *par* 9. 5. que le Rectiligne BCF est égal à la somme des deux ACD, ACE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 2. 17. Fig.

USAGE.

Cette Proposition sert generalement pour ajoûter ensemble plusieurs figures semblables, comme nous avons déja dit dans 47. 1. sans qu'il soit besoin de le repeter icy davantage.

Nous omettons la Prop. XXXII. *parce qu'elle n'est pas necessaire, ni d'une grande consequence.*

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXIII.

Aux Cercles égaux, les Angles au Centre, ou à la circonference, comme aussi les Secteurs, sont entre eux comme les arcs qui les soutiennent.

8. Fig. JE dis premierement, que les deux angles au centre BAC, EDF, des deux cercles égaux BIC, EKF, sont entre eux comme les arcs BC, EF, qui leur servent de base.

PREPARATION.

Divisez chacun des deux angles BAC, EDF, en deux également par les rayons AG, DH, qui diviseront aussi en deux également les arcs BC, EF, aux points G, H, & encore les Secteurs ABCA, DEFD.

DEMONSTRATION.

Parce que *par* 15. 5. l'arc BC est égal à sa moitié BG, comme l'arc EF, est à sa moitié EH, & que pareillement l'angle BAC, est à sa moitié BAG, comme l'angle EDF, est à sa moitié EDH, la Proportion qui est entre les quatre arcs BC, BG, EF, EH, est semblable à celle qui est entre les quatre angles BAC, BAG, EDF, EDH; c'est pourquoy en changeant, *par* 16. 5. on connoîtra qu'à cause des Cercles égaux BIC, EKF, la proportion qui est entre les qua-

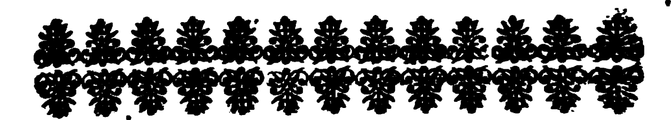
quatre arcs BC, EF, BG, EH, est semblable à celle qui est entre les quatre angles BAC, EDF, BAG, EDH, & que par consequent dans cette seconde Proportion, la Raison du premier angle BAC, au second EDF, est égale à celle du premier arc BC, au second EF, dans la premiere Proportion. *Ce qu'il falloit démontrer*. D'où il suit que les angles à la circonference I, K, qui sont les moitiez des angles au centre A, D, *par* 20. 3. sont aussi dans la Raison de leurs bases BC, EF : & l'on démontrera de la même facon, que les Secteurs ABCA, DEFD, sont aussi entre eux comme leurs bases BC, EF, en considerant ces Secteurs comme des angles. Planche 1. 19. Fig.

SCOLIE.

Cette démonstration est de la même nature que celle de la premiere Proposition de ce Livre, où il faut prendre garde qu'il ne seroit pas permis de raisonner par échange, si dans cette Proposition, les Cercles n'étoient pas égaux, ou si dans la premiere les hauteurs n'étoient pas égales.



LIVRE



LIVRE XI.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

EUclide commence à traiter dans ce Livre du Corps, ou Solide, & premierement des Parallelepipedes, aprés avoir expliqué au commencement quelques proprietez particulieres touchant les surfaces qui les bornent. Nous laissons le septiéme, le huitiéme, le neuviéme, & le dixiéme Livre des Elemens d'Euclide, parce qu'ils n'ont aucune connexion avec les six premiers, ni avec l'onziéme & le douziéme, que nous ajoûterons seulement icy, parce qu'avec les six premiers ils sont suffisans, pour faire entendre passablement bien toutes les principales parties des Mathematiques; l'onziéme & le douziéme étant absolument necessaires pour faire entendre cette troisiéme partie de la Geometrie Pratique, qu'on appelle Stereometrie, la Trigonometrie Spherique, la Gnomonique, la Perspective, & generalement tout ce qui regarde la Section des Plans & des Solides. Ceux qui en voudront davantage, pourront voir Henrion, où l'on trouve outre tous les Livres des Elemens d'Euclide, encore les Donnez d'Euclide.

DEFINITIONS.

I.

Planche I. 1. Fig. Le *Corps*, ou *Solide*, est cette troisiéme espece de quantité, à laquelle on attribuë une longueur, une largeur, & une profondeur, ou épaisseur : *comme*

ABCD

ABCD ; dont les trois dimensions sont la longueur AB, la largeur BC, & la profondeur CD. Planche 14.

Les Physiciens divisent le Corps en *Dur*, qui ne souffre aucun passage à un autre Corps : & en *Mol*, qui donne entrée, & qui peut être facilement penetré par un autre. Mais comme l'imagination rend faciles les choses de plus difficile execution, on peut s'imaginer qu'il y a autant de facilité à penetrer un Corps le plus dur, que celuy qui cede le plus facilement. Ce qui étant accordé à l'imagination, les Mathematiciens appellent *Corps Solide*, ou simplement *Solide*, tout ce qui est étendu en longueur, en largeur, & en profondeur, en faisant abstraction de la matiere, & en concevant que comme la Ligne est causée par le mouvement du Point, & la Surface par le mouvement de la Ligne, aussi le Corps est produit par le mouvement de la Surface : & qu'ainsi le Corps est composé d'une infinité de Surfaces, comme la Surface est composée d'une infinité de Lignes, & la Ligne d'une infinité de Points. D'où il suit, que

II.

Les *Extremitez d'un Corps* sont les Surfaces qui le bornent.

C'est une necessité qu'un Corps soit borné par des Surfaces, tant par ce qui vient d'être dit, que parce que si l'on examine en particulier un Corps, comme ABCD, on y reconnoît facilement un Dessus, sçavoir la Surface DEF : un Dessous, qui est la Surface opposée ABC, qu'on appelle *Base* : un Devant, sçavoir la Surface FAB : un Derriere, qui est la Surface opposée à celle de devant : & des Côtez, dont l'un paroît dans la figure, étant representé par la Surface BCD. 1. Fig.

III.

On dit qu'*une Ligne droite est perpendiculaire à un Plan*, ou *perpendiculairement élevée sur un Plan*, quand elle est perpendiculaire à toutes les lignes qu'elle rencontre dans ce Plan.

Ainsi on connoît que la Ligne droite AB, est perpendiculaire au Plan CDEF, ou élevée perpendiculairement sur le Plan CDEF, si elle est perpendiculaire à chacune des lignes GH, IK, LM, qu'elle rencontre au point B, dans ce Plan. 2. Fig.

IV.

Plan-
che 11.

IV.

On dit qu'*un Plan est perpendiculaire à un autre Plan*, ou *perpendiculairement élevé sur un autre Plan*, lorsqu'une ligne droite tirée dans l'un de ses Plans, perpendiculairement à leur commune section, se rencontre aussi perpendiculaire à l'autre Plan.

3. Fig. *Ainsi on connoît que le Plan EFGH est perpendiculaire au Plan ABCD, ou le Plan ABCD au Plan EFGH, parce que la ligne KL, qui est tirée dans le Plan ABCD, perpendiculairement à la commune section EH est aussi perpendiculaire à l'autre Plan EFGH : ou bien parce que la ligne IK, qui est tirée dans le Plan EFGH perpendiculairement à la commune section EH, est aussi perpendiculaire au Plan ABCD.*

On entend pour *Commune Section de deux Plans*, une ligne commune à ces deux Plans, dans laquelle ils s'entrecoupent: comme EH, laquelle est toûjours une ligne droite, comme il sera démontré dans la *Prop.* 3.

V.

L'*Inclinaison d'une Ligne droite sur un Plan*, est l'angle aigu que fait cette Ligne droite, avec une autre ligne droite, tirée par le point où l'extremité de la ligne inclinée rencontre le Plan, & par le point du même Plan, où il se trouve coupé par la perpendiculaire à ce Plan, tirée de l'autre extrémité de la Ligne inclinée.

Planche 1. 3. Fig. *Ainsi on connoît que l'Inclinaison de la ligne droite IL, avec le Plan ABCD, est l'angle aigu KLI, qu'elle fait avec la ligne droite KL, tirée par les points L, K, où le Plan ABCD se trouve coupé par la ligne inclinée IL, & par la ligne IK, perpendiculaire au Plan ABCD.*

On connoît de la même façon, que l'Inclinaison de la même Ligne droite IL, avec le Plan EFGH, est l'angle KIL, qu'elle fait avec la ligne droite IK, tirée par les points I, K, où le Plan EFGH se trouve coupé par la ligne inclinée IL, & par la ligne LK perpendiculaire au Plan EFGH.

VI.

L'Inclinaison de deux Plans est l'angle aigu de deux lignes droites perpendiculaires à la commune section de ces deux Plans, & tirées par un même point de la même commune section dans chaque Plan. Planche 11. 3. Fig.

Ainsi on connoît que l'Inclinaison des deux Plans ABCD, EFGH, est l'angle aigu que fait la ligne droite HI, tirée dans le Plan ABCD, perpendiculairement à la commune section CE, avec la ligne HK tirée dans le Plan EFGC, perpendiculairement à la même commune section CE. 4. Fig.

On void par cette Définition, qu'afin que deux Plans soient inclinez l'un à l'autre, ils ne doivent pas être perpendiculaires entre eux : & par la Définition precedente, qu'afin qu'une ligne droite soit inclinée sur un Plan, elle ne doit pas être perpendiculaire à ce Plan.

VII.

Les *Plans semblablement inclinez* sont ceux dont les Inclinaisons avec un autre Plan, sont égales.

Quoyque l'Inclinaison de deux Plans suppose qu'ils ne sont pas perpendiculaires entre eux, cela n'empêche pas qu'on ne puisse dire que deux Plans par exemple sont semblablement inclinez à un troisiéme Plan, quand ils sont perpendiculaires à ce même Plan.

VIII.

Les *Plans paralleles* sont ceux, qui étant continuez autant que l'on voudra, ne se rencontrent jamais, étant toûjours également éloignez l'un de l'autre : *comme les deux Plans ABCD, EFGH, dont les distances IK, DL, qui leur sont perpendiculaires sont égales entre elles.* 5. Fig.

IX.

Les *Solides semblables* sont ceux, qui sont terminez par autant de Plans semblables l'un que l'autre : *comme deux cubes.*

Planche 1.

X.

Les *Solides semblables & égaux* sont ceux qui sont terminez par autant de Plans semblables & égaux l'un que l'autre : de sorte que si on les fait penetrer par pensée l'un & l'autre, ils ne se surpasseront pas, ayant les angles & les côtez égaux.

X I.

6. Fig. L'*Angle Solide* est un espace concave indefini, terminé en pointe par plusieurs Plans, qui se rencontrent en un point, où se forme l'angle solide : *comme A, qui est terminé par les trois Plans triangulaires BAD, CAD, BAC.*

X I I.

2. Fig. Le *Prisme* est un Solide qui a deux Plans opposez, paralleles entre eux, semblables & égaux, & les autres Parallelogrammes : *comme ABCD, dont les deux Plans opposez ABC, DEF, sont paralleles, semblables, & égaux, & les autres, comme FAB, BCD, &c. sont des Parallelogrammes.*

7. Fig. Un semblable Solide se nomme *Prisme triangulaire*, quand ses deux Plans opposez & paralleles sont deux Triangles semblables & égaux : comme ABCD, qui est terminé par les trois Parallelogrammes ABFE, ACDE, BCDF, & par les deux triangles semblables paralleles, & égaux ABC, EFD.

1. Fig. 8. Fig. Ce même Solide se nomme *Parallelepipede*, quand il est terminé par six Parallelogrammes, dont les deux opposez & paralleles sont égaux : & quand tous ces Parallelogrammes sont des Rectangles, le Prisme s'appelle *Parallelepipede rectangle*, comme ABCD, qui prend le nom de *Cube*, ou d'*Exaëdre*, quand tous ses côtez sont égaux, c'est à dire quand il est borné par six Quarrez égaux, comme ADCD, qui representera une *Toise cubique*, ou une *Toise cube*, si son côté AB est long d'une Toise, ce qui s'appelle *Toise de long*, ou *Toise courante* : mais il representera un *Pied Cubique*, ou un *Pied Cube*, si le côté AB, ou BC, ou CD, a un Pied en longueur ce qui s'appelle *Pied de long*, ou *Pied courant*.

Nous avons dit dans le Livre Second, que l'Aire d'un Rectangle se mesuroit par de petits Quarrez, & nous dirons icy que le contenu d'un Parallelepipede rectangle, qu'on appelle

Solidité

Solidité, se mesure par de petits Cubes, qui sont produits par des Plans paralleles tirez en long & en travers par les divisions des côtez opposez, ce qui répond au mouvement de la Surface, qui produit un Solide, & ce mouvement répond à la multiplication continuelle que l'on fait des trois dimensions d'un Parallelepipede rectangle, pour en connoître par abregé sa *Solidité*, c'est à dire le nombre des mesures cubiques qu'il contient. Planche 1. Fig.

Ainsi on connoîtra la Solidité du * Parallelepipede Rectangle ABCD, dont la longueur AB est icy supposée de 4. pieds, sa largeur BC de 2, & sa profondeur CD de 3, en multipliant ensemble ces trois nombres 4, 2, 3, & le quatriéme nombre qui vient, sçavoir 24. s'appelle *Nombre Solide*, dont les *côtez* sont 4, 2, 3, parce qu'il fait connoître qu'un Parallelepipede Rectangle, qui a 4 pieds de longueur, 2. pieds de largeur & 3. pieds d'épaisseur, contient 24 pieds cubiques dans sa solidité.

C'est ainsi que l'on connoîtra qu'une Toise courante, comme AB, ayant six pieds courans, la Toise Cubique ABCD, a 216. Pieds cubiques, c'est à cause de cela que ce nombre 216, qui est produit par la Multiplication mutuelle de trois nombres égaux, s'appelle *Nombre Cubique*, dont le *Côté* ou la *Racine Cubique*, est l'un de ces trois nombres égaux, sçavoir 6. 8. Fig.

Un Parallelepipede rectangle, par rapport à ses trois dimensions, se nomme *Solide de trois lignes*, qui en sont les dimensions, c'est à dire que l'une de ces trois lignes en represente la largeur, & l'autre la longueur & la troisiéme la profondeur, soit que ce Solide soit décrit réellement, ou par imagination

Ainsi on connoîtra que le Solide des trois lignes AB, BC, CD, est le Parallelepipede rectangle ABCD, que l'on represente en nombres, lorsque ses trois dimensions sont exprimées par nombres : comme si la longueur AB est de 4. pieds, la largeur BC de 2, & la profondeur CD de 3, le *Solide* de ces trois nombres 4, 2, 3, sera 24, sçavoir le produit de ces trois nombres 4, 2, 3, lequel à cause de cela est appellé *Produit Solide* : & si au lieu de nombres on a des lettres, comme *a*, *b*, *c*, leur produit solide sera *abc*. 9. Fig.

Les autres Définitions appartiennent au douziéme Livre où on les trouvera expliquées.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

Une Ligne droite qui est dans un Plan, étant continuée est toûjours dans le même Plan.

Planche 1. 10. Fig. JE dis que si la ligne droite EF, est dans le Plan ABCD, étant prolongée, elle est encore dans le même Plan ABCD.

PREPARATION.

Tirez par le point F, dans le Plan ABCD la ligne droite FG, perpendiculaire à la ligne EF, & à cette ligne FG la perpendiculaire FH.

DEMONSTRATION.

Parce que chacun des deux angles GFE, GFH, est droit, *par constr.* les deux lignes FH, FE, font une ligne droite, *par* 14. 1. & parce que chacune est dans le Plan ABCD, il s'ensuit que la ligne EF étant prolongée, c'est à dire toute la ligne droite EH, est dans le même Plan ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & nous nous en servirons dans la Gnomonique, pour démontrer qu'un grand Cercle de la Sphere se represente sur un Plan par une ligne droite.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Deux lignes droites qui se rencontrent, sont dans un même Plan; aussi-bien que toutes les parties d'un Triangle.

11. Fig. JE dis que les deux lignes droites AB, CD, qui se rencontrent au point E, & le Triangle AEC, dont les

les deux côtez AE, CE, font des parties des deux lignes precedentes AB, CD, sont dans un même Plan. Planche 1. 11. Fig.

DEMONSTRATION.

Si par le point F pris à discretion sur le côté CE, on tire à l'angle opposé A, la droite AFG, on connoîtra *par Prop.* 1. que les deux parties AF, FG, sont dans un même Plan, aussi-bien que les deux AE, EB, & que les deux CF, EF : & parce que les trois points E, F, C, sont sur une ligne droite *par constr.* il est de necessité que les trois lignes AB, AG, CG, se touchent, & aussi les trois Plans dans lesquels elles sont, & qu'ainsi ces trois Plans n'en fassent qu'un seul. Ainsi on connoît que la ligne AF est dans le même Plan que le côté AE du Triangle AEC, & l'on connoîtra de la même façon que toutes les lignes droites que l'on peut tirer de l'angle A, par tels autres points que l'on voudra du Côté CE, sont dans le même Plan que celuy du côté AE du Triangle AEC. D'où il est aisé de conclure que tant le triangle AEC, que les deux lignes AB, CD, sont dans un même Plan. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 4. *&* 5. qui supposent que deux lignes droites, qui font un angle, sont dans un même Plan. Nous nous en servirons aussi dans la Perspective, pour démontrer, que l'apparence d'une ligne droite dans le Plan du Tableau est aussi une ligne droite, où nous supposerons que toutes les lignes droites tirées de l'œil par tous les points de la ligne droite, sont dans un même Plan, qui est triangulaire.

Planche 1. 9. Fig.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

La commune Section de deux Plans est une ligne droite.

IL est évident que la commune section des deux Plans ABCD, EFGH, est une ligne droite, parce que si par deux points quelconques E, H de cette commune section, l'on tire dans chaque Plan deux lignes droites, ces deux lignes droites tomberont l'une sur l'autre, ne pouvant pas renfermer un espace, & qu'ainsi elles feront la seule ligne droite EH, laquelle étant commune aux deux Plans ABCD, EFGH, en doit être la commune section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert à démontrer les *Prop.* 4. 16. 18. & 19. qui supposent que la commune section des deux Plans est une ligne droite. Nous nous en servirons aussi dans la Perspective, pour démontrer que l'apparence d'une ligne droite dans le Plan du Tableau, est aussi une ligne droite: & dans la Gnomonique, pour démontrer que tous les grands Cercles de la Sphere se representent sur un Plan par des lignes droites: & l'on peut s'en servir dans les autres Projections, pour démontrer que tout ce Cercle perpendiculaire au Plan de Projection, se represente sur ce Plan par une ligne droite.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Si une Ligne droite est perpendiculaire à deux autres qui se coupent, elle le sera aussi au Plan des mêmes lignes.

4. Fig. JE dis que si la ligne AB, est perpendiculaire à chacune des deux lignes droites GH, IK, qui sont dans le Plan CDEF, & qui se coupent au point B, elle est aussi perpendiculaire au Plan CDEF, c'est à dire, *par Déf.* 3. à toutes les lignes tirées dans ce

ce Plan par le point B, comme à la ligne LBM. Planche 1. 2. Fig.

PREPARATION.

Coupez à discretion les lignes égales BG, BH, BI, BK, & joignez les droites GI, KH. Tirez encore du point A, par les points I, L, G, K, M, H, autant de lignes droites.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre triangles Rectangles ABG, ABH, ABI, ABK, sont égaux entre eux, *par* 4. 1. les bases AG, AH, AI, AK, seront égales entre elles : & par la même raison les triangles isoscéles GBI, KBH, étant égaux entre eux, les bases GI, KH, seront aussi égales entre elles ; aussi-bien que les angles à ces bases. D'où il suit *par*. 26. 1. que les triangles équiangles LBG, MBH, sont aussi égaux entre eux, & que par consequent le côté BL est égal au côté BM, & le côté GL au côté HM. Il s'ensuit aussi *par* 8. 1. que les triangles AGI, AKH, sont égaux entre eux, & que par consequent l'angle AGI est égal à l'angle AHM. D'où il suit aussi *par* 4. 1. que les deux triangles AGL, AHM, sont égaux entre eux, & que par consequent la base AL est égale à la base AM. D'où l'on conclud enfin *par* 8. 1. que les triangles ABL, ABM, sont égaux entre eux, & que par consequent l'angle ABL est égal à l'angle ABM, & qu'ainsi la ligne AB est perpendiculaire à la ligne LM. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 5. 8. 9. 11. & 15. & aussi dans les Spheriques, pour démontrer qu'une ligne droite qui passe par les Poles d'un Cercle, est perpendiculaire au Plan de ce Cercle. De plus elle nous fournit une Methode differente de celle qui est enseignée dans la *Prop.* 11. pour tirer une perpendiculaire à un Plan d'un point donné hors de ce Plan. Comme si du point A, l'on veut tirer une perpendiculaire au Plan CDEF, on décrira de ce point A, avec une ouverture volontaire du Compas une

 circonfe-

Planche I. 5. Fig. circonference de ce Cercle sur ce Plan, & ayant marqué à volonté trois points sur cette circonference, comme G, H, I, pour en trouver le centre B, on tirera par ce centre B, au point donné A, la droite AB, qui sera perpendiculaire au Plan proposé CDEF, à cause des trois lignes égales AG, AH, AI. Ce qui sert pour connoître si un style, comme AB, est planté bien droit sur le Plan CDEF, sçavoir lorsqu'ayant pris à discretion depuis son pied B, les trois distances égales, BG, BH, BI, sa pointe B, est également éloignée des trois points G, H, I.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une ligne droite est perpendiculaire à trois autres, qui se coupent en un même point, ces trois lignes sont dans un même Plan.

6. Fig. JE dis que si la ligne droite AB, est perpendiculaire aux trois lignes BC, BD, BF, qui se coupent au point B, ces trois lignes, BC, BD, BF, sont dans un même Plan : de sorte que si le Plan des deux lignes BA, BF, est BAK, & que le Plan des deux BC, BD, soit DGHI, la ligne BF sera la commune section de ces deux Plans.

DEMONSTRATION.

Si la ligne BE est la commune section des deux Plans DGHI, BAK, on connoîtra *par Déf* 3. que la ligne AB étant perpendiculaire aux deux BD, BC, *par supp.* & par consequent à leur Plan DGHI, *par Prop.* 4. elle est aussi perpendiculaire à la commune section BE, & qu'ainsi l'angle ABE est droit, & par consequent égal à l'angle ABF, qui est aussi droit, parce que l'on suppose que la ligne AB est aussi perpendiculaire à la ligne BF. D'où il est aisé de conclure que les deux lignes BE, BF, conviennent ensemble, & que par consequent la ligne BF est la commune section des deux Plans DGHI, BAK, & qu'ainsi elle est dans le Plan des deux BC, BD. *Ce qu'il falait démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Les Lignes droites, qui sont perpendiculaires à un même Plan, sont paralleles entre elles.

JE dis que si les deux Lignes droites AB, CD, sont chacune perpendiculaire au Plan EFGH, elles sont paralleles entre elles. Planche. 1. 12. Fig.

PREPARATION.

Joignez la droite BD, à laquelle ayant tiré dans le Plan EFGH, la perpendiculaire DI égale à AB, joignez les droites BI, AI, AD.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne AB est perpendiculaire au Plan EFGH, *par supp.* elle sera aussi perpendiculaire à la ligne BD, *par Déf.* 3. Ainsi l'angle ABD étant droit, sera égal à l'angle BDI, qui est aussi droit, *par constr.* & parce que l'on a fait la ligne DI égale à la ligne AB, il s'ensuit *par* 4. 1. que les deux triangles rectangles ABD, DBI, sont égaux entre eux, & la base AD égale à la base BI: & alors on connoîtra *par* 8. 1. que les deux triangles AID, AIB, seront égaux entre eux, & l'angle ADI égal à l'angle ABI, lequel étant droit *par Déf.* 3. parce que l'on suppose que la ligne AB est perpendiculaire au Plan EFGH, il s'ensuit que l'angle ADI est aussi droit, & qu'ainsi la ligne ID est perpendiculaire à AD, & comme elle est aussi perpendiculaire à la ligne BD, *par constr.* & encore à la ligne CD, *par Déf.* 3. parce que cette ligne CD est suppo-

sée

Planche 1. 32. Fig. sée aussi perpendiculaire au Plan EFGH. Les trois lignes DC, DA, DB, ausquelles la ligne ID est perpendiculaire, sont dans un même Plan, *par Prop.* 5. D'où il suit que les deux perpendiculaires AB, CD, sont aussi dans un même Plan, & *par* 29. 1. qu'elles sont paralleles entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 9, 13. & 14. & elle nous fait connoître que deux lignes paralleles, comme AB, CD, sont dans un même Plan, ce qui sert pour la démonstration des *Prop.* 7. & 8. qui supposent que deux lignes paralleles sont dans un même Plan.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

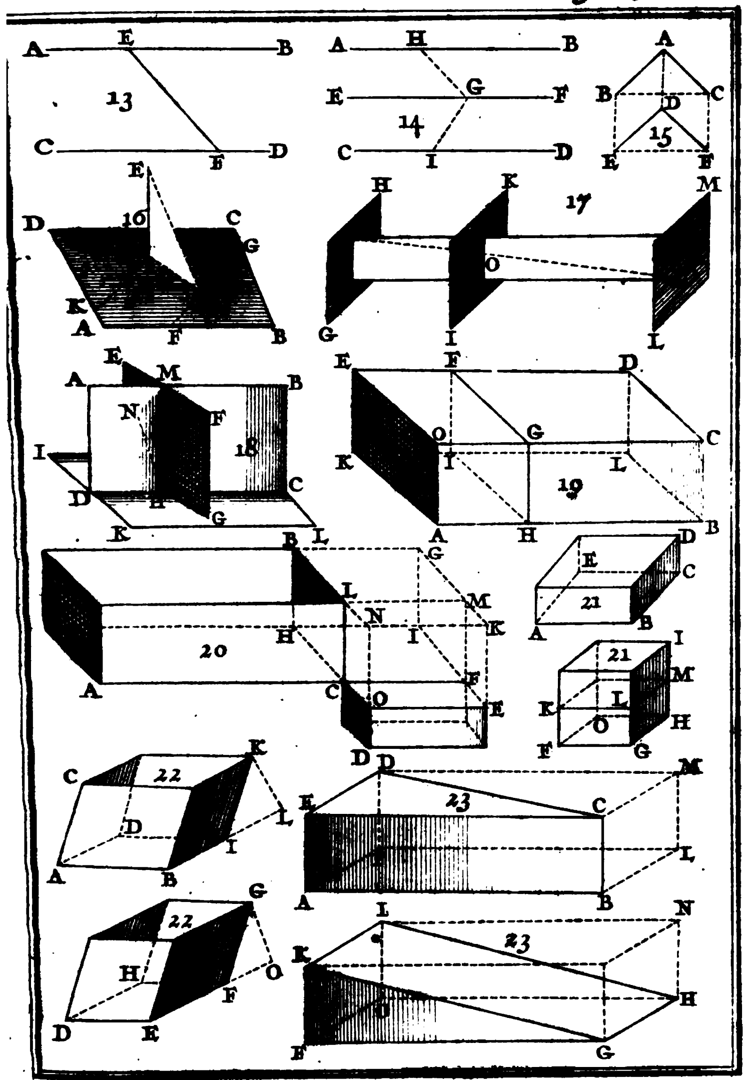
La Ligne droite qui est tirée d'une parallele à l'autre, est dans le Plan de ces deux paralleles.

Planche 2. 13. Fig. JE dis que si par le point E, de la ligne AB, on tire à un autre point F de la ligne CD parallele à la premiere AB, la droite EF, cette ligne EF est dans le Plan des deux paralleles AB, CD.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux points E, F, sont dans le Plan des deux paralleles AB, CD, on peut tirer dans ce Plan par ces deux points E, F, une ligne droite, qui ne peut pas être differente de la ligne EF, parce que deux lignes droites ne peuvent pas renfermer un espace. Ainsi la ligne EF est dans le Plan des deux paralleles AB, CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-


A E B
13
C F D
A H B
E G F
14
C I D
A
B C
D
15
E F
E
D 16 C
G
K
A F B
H K M
17
O
G I L
E M
A B
N F
I 18
D H C
K G L
E F D
O G C
K I L
19
A H B
B L
G
L M
N
H I K
20
A F
C O E
D
D
E
C
21
A B
I
21
M
K L
O H
F G
K
C 22
D L
I
A B
D M
E 23 C
L
A B
G
22
H O
F
D E
L N
K 23
H
F G

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si de deux Lignes droites paralleles entre elles, l'une est perpendiculaire à un Plan, l'autre sera aussi perpendiculaire au même Plan.

JE dis que si des deux lignes paralleles AB, CD, la premiere AB est perpendiculaire au Plan EFGH, la deuxiéme CD est aussi perpendiculaire au Plan EFGH. Planche 12. Fig.

PREPARATION.

Tirez dans le Plan EFGH la ligne BD, qui sera perpendiculaire à la ligne AB, *par Déf.* 3. & *par* 29. 1. à sa parallele CD. Tirez encore dans le Plan EFGH la ligne DI perpendiculaire à BD, & égale à AB, & menez les droites AD, AI, BI.

DEMONSTRATION.

Parce que *par* 4. 1. les deux triangles rectangles ABD, BDI, sont égaux entre eux, les deux bases AD, BI, seront aussi égales entre elles : & *par* 8. 1. les deux triangles ABI, ADI, seront égaux entre eux, & l'angle ADI, sera égal à l'angle ABI, lequel étant droit *par Déf.* 3. puisque la ligne AB est perpendiculaire au Plan EFGH, *par supp.* l'angle ADI, sera aussi droit. Ainsi la ligne DI étant perpendiculaire aux deux DB, DA, elle doit être *par Prop.* 4. perpendiculaire à leur Plan, qui est le même que celuy dans lequel sont les deux paralleles AB, CD, & par consequent à la ligne CD, *par Déf.* 3. Puisque donc la ligne CD est perpendiculaire aux deux DB, DI, elle sera *par Prop.* 4. perpendiculaire à leur Plan, c'est à dire au Plan EFGH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration des *Prop.* 9. 10. 11. 12. & 18.

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Deux Lignes droites paralleles à une troisiéme, sont paralleles entre elles, quoy qu'elles soient dans des Plans differens.

Plan. de 2. 14. Fig. JE dis que si les deux lignes AB, CD, sont paralleles chacune à la même ligne EF, elles sont paralleles entre elles, quoique les trois ne soient pas dans un même Plan, autrement le Theorême seroit évident *par* 30. 1.

PREPARATION.

Tirez par le point G, pris à discretion sur la ligne EF, dans le Plan des deux paralleles AB, EF, à la ligne EF, la perpendiculaire GH, qui sera aussi perpendiculaire à la ligne AB, *par* 29. 1. & dans le Plan des deux paralleles EF, CD, à la même ligne EF, la perpendiculaire GI, qui sera aussi perpendiculaire à la ligne CD, *par* 29. 1.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne EG, est perpendiculaire à chacune des deux lignes GH, GI, *par constr.* elle sera perpendiculaire à leur Plan *par Prop.* 4. c'est pourquoy *par Prop.* 8. les deux lignes AB, CD, qui sont paralleles à la ligne EG, *par supp.* seront aussi perpendiculaires au même Plan des deux lignes GH, GI, & *par Prop.* 6. les deux lignes AB, CD, seront paralleles entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & de la *Prop.* 15. On s'en sert dans la Gnomonique, pour démontrer que dans les Cadrans differens les Axes sont paralleles entre eux, parce qu'ils sont tous paralleles à l'Axe du Monde.

PROPOSITION X.

THEOREME X.

Si deux Lignes droites, qui font un angle, sont paralleles à deux autres de different Plan, ces deux autres Lignes droites feront un angle égal à celuy des deux premieres.

JE dis que si les deux Lignes AB, AC, sont paralleles aux deux DE, DF, l'angle BAC est égal à l'angle EDF, quoique le Plan des deux lignes AB, AC, soit different de celuy des deux DE, DF. Planche 2. 15. Fig.

PREPARATION.

Coupez la ligne DE égale à la ligne AB; & la ligne DF égale à la ligne AC, & joignez les droites BC, EF, BE, AD, CF.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes AB, DE, sont paralleles, *par supp.* & égales *par constr.* les deux AD, BE, seront aussi égales & paralleles, *par* 33. 1. & par la même raison les deux AD, CF, seront égales & paralleles: c'est pourquoy les deux BE, CF, seront égales, *par Ax.* 1. & paralleles *par Prop.* 9. & *par* 33. 1. les deux BC, EF, seront égales, & enfin *par* 8. 1. les deux triangles ABC, DEF, seront égaux, & l'angle BAC égal à l'angle EDF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

On se sert de cette Proposition dans la Perspective, pour démontrer que les apparences de deux lignes droites font un angle égal à celuy de ces deux lignes droites, quand elles sont paralleles au Tableau: & aussi que les apparences de deux lignes droites sont paralleles entre elles, lors que ces deux lignes droites sont paralleles entre elles & au Tableau. *La Prop.* 24. se démontre aussi par le moyen de celle-cy.

PRO-

PROPOSITION XI.

PROBLEME I.

Tirer une Ligne droite perpendiculaire à un Plan, par un point donné hors de ce Plan.

Planche 1. 16. Fig.

POur tirer au Plan ABCD, une perpendiculaire par le point E, donné hors de ce Plan, tirez à discretion dans ce Plan la droite FG, & luy tirez du point donné E, la perpendiculaire EH, *par* 12. 1. Tirez encore par le point ABCD, la droite HI, perpendiculaire à la ligne FG, *par* 11. 1. & *par* 12. 1. à la ligne HI, par le point donné E, la perpendiculaire EI, qui sera perpendiculaire au Plan proposé ABCD.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne FG, est perpendiculaire aux deux HI, HE, *par constr.* elle sera aussi perpendiculaire à leur Plan EHI *par Prop.* 4. c'est pourquoy si à la ligne FG, on tire la parallele IK, on connoîtra *par Prop.* 8. que cette parallele IK est aussi perpendiculaire au Plan EHI, & par consequent à la ligne EI, *par Def.* 3. Puisque donc la ligne EI est perpendiculaire aux deux lignes IK, IH, elle sera *par Prop.* 4. perpendiculaire à leur Plan ABCD. *Ce qu'il falloit faire & demontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & je m'en suis servi souvent dans la Gnomonique, lorsque dans la description d'un Cadran sur une muraille, ayant determiné le bout du Style à la pointe d'une verge de fer plantée obliquement sur la muraille, j'en ay voulu déterminer le pied & la longueur.

PROPOSITION XII.

PROBLEME II.

Tirer une Ligne droite perpendiculaire à un Plan, par un point donné sur ce Plan.

POur tirer par le point donné B, sur le Plan EFGH, une ligne perpendiculaire à ce Plan, tirez *par Prop.* 11. du point C, pris à discretion hors du Plan, la perpendiculaire CD, & du point B, *par* 30. 1. à la ligne CD, la paralléle AB, qui sera perpendiculaire au Plan proposé EFGH, comme il est évident *par Prop.* 8. Planche 1. Fig. 12.

USAGE.

Cette Proposition sert dans la Gnomonique, pour placer le style quand on a décrit un Cadran sur quelque Plan : mais dans la pratique, il vaut mieux se servir d'une Equierre, en tirant du pied du style B, deux lignes à discretion BD, BI, sur le Plan du Cadran EFGH, pour y appliquer le côté d'une Equierre, en sorte que l'angle droit touche le point B, & placer le style AB, de telle sorte qu'il touche l'autre côté de l'Equierre, car ainsi il sera perpendiculaire aux deux lignes BD, BI, & par consequent à leur Plan EFGH. *par Prop.* 4.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XI.

On ne peut pas tirer par un même point deux lignes droites perpendiculaires à un Plan.

JE dis premierement, que du point D, pris dans le Plan EFGH, on ne peut pas tirer deux lignes droites differentes perpendiculaires à ce Plan ; par exemple DC, DA ; parce que ces deux lignes seroient paralleles entre elles, *par Prop.* 6. & qu'ainsi elles conviendroient ensemble, & ne feroient qu'une même ligne, puisqu'elles partent du même point D.

Je

Planche 3. Fig. 12. Je dis en second lieu, que du point A, pris hors du Plan EFGH, on ne peut pas tirer deux lignes droites differentes perpendiculaires à ce Plan, comme AB, AD, tant par ce qui vient d'être dit, que parce que ces deux perpendiculaires AB, AD, étant dans un même Plan, *par Prop.* 3. dont la section avec le Plan EFGH, sera BD, elles feroient avec cette commune section BD, deux angles droits, *par Déf.* 3. de sorte que chacun des deux angles ABD, ADB, du triangle DAB, seroit droit, ce qui est impossible *par* 32. 1.

USAGE.

Cette Proposition est si évidente, qu'elle ne merite pas d'occuper icy une place, & il semble qu'Euclide ne l'a voulu ajoûter, que pour démontrer par son moyen les *Prop.* 19. & 38.

PROPOSITION XIV.

THEORÊME XII.

Les Plans sont paralleles, ausquels une même Ligne droite est perpendiculaire.

5. Fig. JE dis que si la ligne IK est perpendiculaire à chacun des deux Plans ABCD, EFGH ces deux Plans sont paralleles entre eux, c'est à dire également éloignez, *par Déf.* 8. de sorte que si à la ligne IK, on tire la parallele DL, qui sera aussi perpendiculaire aux deux Plans ABCD, EFGH, *par Prop.* 6. les deux paralleles IK, DL, seront égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint les droites ID, KL, on connoîtra *par Déf.* 3. que les quatre angles de la Figure DIKL, sont droits, & que par consequent c'est un Parallelogramme, c'est pourquoy *par* 34. 1. les deux côtez opposez IK, DL, seront égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-

Planche 11. 5. Fig.

USAGE.

Cette Proposition nous fait connoître, que tous les Cercles d'une Sphere, qui ont les mêmes Poles, sont paralleles entre eux, parce qu'ils ont un Axe commun, qui leur est perpendiculaire. Nous nous servirons aussi de cette Proposition pour la démonstration de la suivante.

PROPOSITION XV.

THEOREME XIII.

Si les deux Lignes d'un Angle sont paralleles aux deux Lignes d'un autre angle dans un Plan different, les Plans de ces deux angles seront paralleles entre eux.

JE dis que si les deux lignes IM, IN, de l'angle MIN, qui est dans le Plan ABCD, sont paralleles aux deux lignes GP, GE, de l'angle PGE, qui est dans le Plan EFGH, les deux Plans ABCD, EFGH, sont paralleles entre eux. 5. Fig.

PREPARATION.

Tirez du point I, la droite IK, perpendiculaire au Plan EFGH, *par Prop.* 11. & par le point K, où elle rencontre ce Plan, tirez dans le même Plan, les deux lignes KO, KQ, paralleles aux deux GP, GE, & par consequent aux deux IM, IN, *par Prop.* 9.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne IK est perpendiculaire au Plan EFGH, *par constr.* chacun des deux angles IKO, IKQ, sera droit, *par Déf.* 3. & parce que les deux lignes KO, IM, sont paralleles *par constr.* & par consequent dans un même Plan, *par Prop.* 6. l'angle KIM, sera aussi droit *par* 29. 1. On connoîtra de la même façon, qu'à cause des deux paralleles KQ, IN, l'angle KIN est aussi droit. C'est pourquoy la ligne IK, étant perpendiculaire aux deux IM, IN, elle sera aussi perpendiculaire à leur Plan

Planche 1. ABCD, *par Prop.* 4. & parce qu'elle est aussi perpendiculaire au Plan EFGH, *par constr.* il s'ensuit *par Prop.* 14. que les deux Plans ABCD, EFGH, sont paralleles entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVI.

THEOREME XIV.

Les communes Sections d'un Plan avec deux autres Plans paralleles, sont paralleles entre elles.

16. Fig. IL est évident que les deux communes sections ID, KL, du Plan DIKL, avec les deux Plans paralleles ABCD, EFGH, sont paralleles entre elles, parce qu'étant dans les Plans paralleles ABCD, EFGH, elles n'en peuvent pas sortir, *par Prop.* 1. & ainsi ne peuvent jamais se rencontrer.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, & des *Prop.* 16. & 24. & l'on s'en sert aussi dans la Perspective, pour démontrer que les apparences des lignes paralleles au Tableau, leur sont paralleles.

PROPOSITION XVII.

THEOREME XV.

Deux Lignes droites sont coupées proportionnellement par des Plans paralleles.

Planche 2. 17. Fig. JE dis que les deux Lignes droites AB, CD, sont divisées proportionnellement par les Plans paralleles GH, IK, LM, c'est à dire que la Raison des deux parties AE, EB, est égale à celle des deux CF, FD.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire la droite AD, qui rencontre le Plan IK au point O, on connoîtra *par Prop.* 16. que les communes sections EO, BD, du Plan triangulaire ABD, avec les deux Plans paralleles

IK,

IK, LM, sont paralleles entre elles, & *par* 2. 6. que la Raison des deux lignes AE, EB, est égale à la Raison des deux lignes AO, OD: & pareillement on connoîtra que les communes sections AC, OF, du Plan triangulaire ADC, avec les deux Plans paralleles GH, IK, sont paralleles entre elles, & que par consequent la Raison des deux lignes CF, FD, est égale à celle des deux AO, OD, c'est à dire à celle des deux AE, BD. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 2. 17. Fig.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVI.

Si une Ligne droite est perpendiculaire à un Plan, tous les Plans dans lesquels elle se trouvera, seront perpendiculaires au même Plan.

JE dis que si la ligne droite IK est perpendiculaire au Plan ABCD, quelque Plan que ce soit, où elle se trouvera, par exemple le Plan EFGH, dont la commune section avec le Plan ABCD, est la droite EH, sera perpendiculaire au Plan ABCD. Planche 1. 3. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire dans le Plan EFGH, une ligne quelconque GH perpendiculaire à la commune section EH, on connoîtra *par* 29. 1. qu'elle est parallele à la ligne IK, laquelle étant perpendiculaire au Plan ABCD, *par supp.* fait connoître *par Prop.* 8. que sa parallele GH est aussi perpendiculaire au Plan ABCD, & *par Def.* 4. que le Plan EFGH est perpendiculaire au Plan ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer que tous les grands Cercles de la Sphere, qui passent par les Poles d'un autre, sont perpendiculaires au Plan de cet autre, dont l'Axe se rencontre dans tous ces Cercles. Ainsi on connoît que tous les Cercles Verticaux sont perpendiculaires au Plan de l'Horizon, & que tous les Cercles Meridiens sont perpendiculaires au Plan de l'Equateur.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XVII.

Si deux Plans qui se coupent, sont perpendiculaires à un autre, leur commune section luy sera aussi perpendiculaire.

Planche 2. 18. Fig.

JE dis que si chacun des deux Plans ABCD, EFGH, dont la commune section est MH, est perpendiculaire au Plan IKLC, leur commune section MH est aussi perpendiculaire au Plan IKLC.

PREPARATION.

Tirez par le point H, dans le Plan ABCD, la droite HN perpendiculaire à la commune section DH de ce Plan avec le Plan IKLC, & dans le Plan EFGH, la droite HO perpendiculaire à la commune section GH de ce Plan avec le Plan IKLC.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes HN, HO, sont *par constr.* perpendiculaires aux communes sections DH, GH, du Plan IKLC, avec les Plans ABCD, EFGH, qui sont perpendiculaires au Plan IKLC, *par supp.* elles seront *par Déf.* 4. perpendiculaires au même Plan IKLC, ce qui étant impossible *par Prop.* 13. il s'ensuit que ces deux perpendiculaires HN, HO, se reduisent à une seule, sçavoir HM, laquelle par consequent est perpendiculaire au Plan IKLC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition dans la Perspective, pour démontrer que quand le Tableau est droit, c'est à dire perpendiculaire au Plan Geometral, toutes les droites qui sont perpendiculaires au même Plan Geometral, se representent dans le Tableau par des lignes droites perpendiculaires à la ligne de terre.

PROPOSITION XX.

THEOREME XVIII.

Si trois Angles plans composent un Angle solide, la somme de deux quelconques est plus grande que le troisiéme.

JE dis que des trois Angles plans BAC, BAD, CAD, qui composent l'Angle solide A, le plus grand de tous, par exemple BAC, est plus petit que la somme des deux autres BAD, CAD. Planche 1. 6. Fig.

CONSTRUCTION.

Retranchez du plus grand angle BAC, l'angle BAE égal à l'angle BAD, & ayant fait les lignes égales AD, AE, joignez les droites BEC, DB, DC.

DEMONSTRATION.

Parce que l'angle BAE est égal à l'angle BAD, *par constr.* & le côté AE égal au côté AD, les triangles BAD, BAE, seront égaux entre eux, *par* 4. 1. & la base BE sera égale à la base BD; & comme les deux côtez DB, DC, du triangle BDC, sont ensemble plus grands que le seul côté BC, *par* 20. 1. en ôtant les lignes égales BD, BE, il restera la ligne CD plus grande que la ligne CE, & par 25. 1. l'angle CAD sera plus grand que l'angle CAE, c'est pourquoy en ajoûtant les deux angles égaux BAD, BAE, on connoîtra que les deux angles CAD, BAD, sont ensemble plus grands que l'angle BAC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la suivante, laquelle neanmoins se peut démontrer sans celle-cy, comme vous allez voir.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XIX.

Tous les Angles plans, qui composent un Angle solide, sont ensemble moindres que quatre droits.

Planche 1. 6. Fig. JE dis que la somme des trois angles plans BAC, BAD, CAD, qui composent l'angle solide A, sont ensemble moindres que quatre droits.

DEMONSTRATION.

Si les trois angles plans BAC, BAD, CAD, étoient sur le Plan BCD, ils seroient ensemble égaux à quatre droits, parce qu'ils seroient mesurez par la circonference entiere du Cercle décrit de leur pointe commune A : mais comme ces angles sont élevez au dessus du Plan BCD, & par consequent moindres que s'ils étoient sur ce Plan, comme il est aisé de connoître *par* 21. 1. il s'ensuit que les trois angles BAC, BAD, CAD, sont ensemble moindres que quatre droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Les Prop. XXII. *&* XXIII. *sont inutiles.*

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXI.

Si un Solide est terminé par des Plans paralleles, de quatre côtez, les opposez seront des Parallelogrammes semblables & égaux.

5. Fig. JE dis que si le Solide ABCDE, est borné par des Plans paralleles de quatre côtez, ses surfaces opposées sont des Parallelogrammes semblables & égaux.

DEMONSTRATION.

Parce que les Plans AEGF, BCDH, sont paralleles, *par supp.* & qu'ils sont coupez par le Plan DEFH, les communes sections EF, DH, seront

pas

paralleles, *par Prop.* 16. De même parce que les Plans ABHF, CDEG, sont paralleles, & qu'ils sont coupez par le Plan DEFH, les communes sections ED, FH, seront paralleles. Ce qui fait voir que le Plan DEFH est un Parallelogramme : & l'on connoîtra de la même façon que les autres Plans, sont aussi des Parallelogrammes. D'où il est aisé de conclure, que les deux opposez sont équiangles, *par Prop.* 10. & égaux, parce qu'ils ont les côtez égaux, les uns aux autres, *par* 34. 1. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 21. 1. Fig.

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & aussi pour la démonstration de la *Prop.* 28.

PROPOSITION XXV.

THEOREME XXII.

Si l'on coupe un Parallelepipede par un Plan parallele à l'une de ses surfaces : les deux Solides qui naîtront par cette division, seront entre eux comme leurs bases.

JE dis que si l'on divise le Parallelepipede ABCDE par le Plan EFGHI, parallele au Plan AOEK, ou au Plan BCDL, le Solide EFGHA, sera au Solide FDCBH, comme la base AHIK, à la base HILB. Planche 2. 19. Fig.

DEMONSTRATION.

Si par tous les points de la ligne AO, qui peut passer pour la hauteur commune aux deux Solides EH, FB, qui sont des Parallelepipedes, *par Prop.* 24. l'on fait passer par pensée des plans paralleles à la base commune ABLK, ou CDEO, ces Plans diviseront chaque Solide en autant de petits Plans l'un que l'autre, dont chacun sera un Parallelogramme égal & semblable à la base de son Parallelepipede, *par Prop.* 24. C'est pourquoy chaque Plan du Solide EH, aura même Raison à chaque Plan du Solide FB, que la base AI, à la base HL, & *par* 12. 5. tous les Plans du Solide EH, c'est à dire le Solide EH,

Planche 2. 39. Fig. aura même Raison à tous les Plans du Solide FB, c'est à dire au Solide FB, que la base AI, à la base HI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition nous fait connoître que les Parallelepipedes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases: ce qui se doit aussi entendre des Prismes, parce que la démonstration s'en fera de la même façon, si l'on considere les deux Plans opposez, qui sont paralleles semblables, & égaux comme des bases.

Les Prop. XXVI. *&* XXVII. *sont inutiles.*

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXIII.

Un Parallelepipede est divisé en deux Prismes égaux par le Plan qui passe par les deux Diagonales de deux surfaces opposées.

Planche 1. 1. Fig. JE dis que le Parallelepipede ABCDE, est divisé en deux également par le Plan, qui passe par les deux Diagonales paralleles, AC, FD, des deux surfaces opposées ABCG, DEFH.

DEMONSTRATION.

Si par tous les points de la ligne AF, qui peut passer pour la hauteur du Parallelepipede ABE, on imagine des Plans paralleles à la base ABCG, tous ces Plans diviseront le Parallelepipede ABE, en de petits Parallelogrammes, qui seront semblables & égaux à la base ABCG, *par Prop.* 24. & qui *par* 34. 1. seront divisez chacun en deux triangles égaux par le Plan qui passe par les deux Diagonales AC, FD. Ce qui fait connoître que les deux Prismes triangulaires, qui naissent de la section du Parallelepipede ABCDE, par le Plan diagonal, sont compris d'autant de triangles égaux l'un que l'autre, & que par consequent ils sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Propofition fert pour la démonftration de la *Prop.* 1. 40. Planche 1. Fig.

La Prop. XXIX. *eft inutile parce qu'elle eft virtuellement comprife dans les deux fuivantes, que nous reduirons à une feule.*

PROPOSITION XXX & XXXI.

THEOREME XXV. & XXVI.

Les Parallelepipedes de même hauteur, qui ont la même bafe, ou bien des bafes égales, font égaux entre eux.

C'Eft une fuite de la *Prop.* 25. où nous avons reconnu que les Parallelepipedes de même hauteur font entre eux comme leurs bafes ; d'où il eft aifé de conclure que quand les bafes font égales, les Parallelepipedes font égaux. Il en eft de même des Prifmes.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXVII.

Les Parallelepipedes de même hauteur, font en même Raifon que leurs bafes.

C'Eft auffi une fuite de la *Prop.* 25. qui fait connoître que ce Theorême eft auffi vray à l'égard des Prifmes.

PRO-

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXVIII.

Les Parallelepipedes semblables sont en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues.

Planche 2. 30. Fig. JE dis que si les Parallelepipedes ABLC, CDEF, sont semblables, en sorte que tous les Plans de l'un soient semblables à tous les Plans de l'autre, & que tous leurs angles soient égaux, auquel cas on pourra placer ces Solides en ligne droite, comme vous voyez dans la Figure; ces Parallelepipedes seront en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues, par exemple des deux AC, CF.

DEMONSTRATION.

Si l'on décrit les Parallelepipedes CG, OM, en prolongeant les côtez des deux proposez, comme vous voyez dans la Figure, on connoîtra *par Prop.* 32. que le Solide ABLC, est au Solide BCFG de même hauteur, comme la base AH, à la base CI, ou *par* 1. 6. comme le côté AC, au côté CF. On connoîtra de la même façon que le Solide BCFG, est au Solide CEKL, comme la base CI à la base CE, ou comme le côté CH, au côté CO. Et qu'enfin le Solide CEKL, est au Solide CDEF, comme la base OK à la base DE, ou comme le côté ON, au côté OD: & comme la Raison de ON à OD, est la même que celle de CH, à CO, & que celle de AC à CF *par supp.* il s'ensuit que la Raison du Solide ABLC au Solide CDEF, étant composée de ces trois Raisons égales, est triplée de chacune, & par consequent de celle de AC à CF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il s'ensuit de cette Proposition, que les Parallelepipedes semblables, sont comme les Cubes de leurs côtez homologues, parce que les Cubes étant des Parallelepipedes semblables

blables, sont en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues. Planche 29. Fig.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi que si quatre Lignes sont continuellement proportionnelles, le Parallelepipede décrit sur la premiere, est à un Parallelepipede semblable décrit sur la seconde, comme la premiere à la quatriéme, parce que la Raison de la premiere à la quatriéme est triplée de celle de la premiere à la seconde.

COROLLAIRE. III.

Il s'ensuit encore que les Prismes triangulaires semblables sont en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues, parce que *par Prop.* 28. ils sont les moitiez des Parallelepipedes semblables, qui sont dans cette même Raison. Il en est de même des Prismes polygones semblables, parce qu'on les peut reduire en Prismes triangulaires.

USAGE.

Cette Proposition sert pour augmenter ou pour diminuer un Solide, par exemple un Cube, selon une Raison donnée: comme si l'on vouloit un Cube double du proposé, ce qu'on appelle communément la *Duplication du Cube*; il faudroit trouver entre le côté du Cube proposé & son double, deux lignes moyennes continuellement proportionnelles, dont celle qui suivroit en proportion le côté du Cube proposé, seroit le côté du Cube double, comme il est évident *par Coroll.* 2. On se sert aussi de cette Proposition, pour la demonstration de la *Prop.* 37.

On connoît aussi par cette Proposition, que si un Cube pesoit par exemple une livre, un Cube d'une semblable matiere, dont le côté seroit double de celuy du premier, peseroit huit livres, parce que la Raison triplée d'une double est octuple. Il en est de même d'une Sphere, dont le diametre seroit double de celuy d'une autre Sphere, parce que deux Spheres sont en Raison triplée de celle de leurs diametres, *par* 18. 12. on se sert aussi de cette Proposition pour démontrer la 8. 12. & la 12. 12.

PRO-

Planche 2. 11. Fig.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXIX.

Les Parallelepipedes égaux ont les bases & les hauteurs reciproques : & ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques sont égaux entre eux.

JE dis premierement, que si les Parallelepipedes ABCD, FGHI, sont égaux entre eux, leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'est à dire que la base ABCE, est à la base FGHO, comme la hauteur HI, à la hauteur CD.

PREPARATION.

Ayant pris HM égale à CD, faites passer par le point M. le Plan MLK. parallele à la base FGHO,

DEMONSTRATION.

Parce que le Solide AD, est au Solide FM de même hauteur *par constr.* comme la base AC est à la base FH; *par Prop.* 32. le Solide FI, qui est égal au Solide AD, *par supp.* est aussi au Solide FM, comme la base AC, à la base FM, *par* 7. 5. & parce que *par Prop.* 32. le Solide FI, est au Solide FM, comme la base GI à la base GM, ou *par* 1. 6. comme la hauteur HI à la hauteur HM, ou CD, son égale, *par constr.* il s'ensuit *par* 11. 5. que la base AC est à la base FH, comme la hauteur HI, à la hauteur CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si la base AC est à la base FH, comme la hauteur HI, à la hauteur CD, les deux Parallelepipedes AD, FI, sont égaux entre eux.

DEMONSTRATION.

Parce que la base AC est à la base FH, comme la hauteur HI à la hauteur CD, ou HM, *par supp.* & que *par Prop* 32. la base AC est à la base FH, comme le Solide AD au Solide FM, de même hauteur ; le Solide AD sera au Solide FM, comme la hauteur

HI

HI à la hauteur HM : & parce que la hauteur HI est à la hauteur HM, comme la base GI à la base GM, *par* 1. 6. ou comme le Solide FI au Solide FM, *par Prop.* 32. il s'ensuit que le Solide AD est au Solide FM, comme le Solide FI, au Solide FM, & que *par* 9.5. les Solides AD, FI, sont égaux entre eux. *Ce qui restoit à démontrer.* Planche 2. 21. Fig.

SCOLIE.

Ces deux démonstrations supposent que les Parallelepipedes proposez AD, FI, sont rectangles, afin que les côtez CD, HI, puissent être pris pour les hauteurs : & quand cela n'arrivera pas, c'est à dire quand les côtez CD, HI, ne seront pas perpendiculaires à leurs bases AC, FH, neanmoins la démonstration sera toûjours la même, parce que *par Prop.* 28. on peut imaginer sur les mêmes bases des Parallelepipedes rectangles égaux aux proposez, en leur donnant les mêmes hauteurs. Il est évident que ce Theorême se peut appliquer à toute sorte de Prismes, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

USAGE.

Cette Proposition sert pour changer un Prisme donné en un autre sur une base donnée : comme si sur la base donnée ABCE on veut faire un Prisme égal au donné FI, on cherchera à la base AC, la base FH, & à la hauteur HI, une quatriéme ligne proportionnelle CD, qui sera la hauteur du Prisme qu'on cherche, &c. On se sert aussi de cette Proposition pour démontrer la 9. 12.

La Prop. XXXV. *est inutile.*

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXXI.

Si trois Lignes droites sont proportionnelles, le Parallelepipede fait de ces trois lignes, est égal à un Parallelepipede équiangle, qui a tous ses côtez égaux à la moyenne.

JE dis que si les trois lignes AB, AC, AD, sont proportionnelles, le Parallelepipede ABKC, qui est fait de ces trois lignes, c'est à dire dont les 22. Fig.

trois

Planche 21. Fig. trois dimensions sont égales à ces lignes, est égal au Parallelepipede équiangle DEFGH, dont chaque côté est égal à la moyenne proportionnelle AC.

DEMONSTRATION.

Parce que chacun des deux côtez DE, EF, est égal à la ligne AC, & que les trois AB, AC, AD, sont proportionnelles, *par supp.* on connoît que AB est à DE, comme EF est à AD, & *par* 14. 6. que les deux bases ABID, DEFG, que l'on suppose équiangles, sont égales entre elles: & parce que les hauteurs KL, GO, sont aussi égales entre elles; à cause des angles égaux F, I; & des côtez égaux FG, IK, *par supp.* il s'ensuit *par Prop.* 31. que les Solides AK, DG, sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition est très-utile dans l'Arithmetique par Geometrie, pour trouver le côté d'un Cube égal à la somme ou à la difference de deux Cubes donnez, quoique cela se puisse faire autrement sans cette Proposition.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXXII.

Les Parallelepipedes semblables décrits sur quatre lignes proportionnelles, sont proportionnels, & si les parallelepipedes semblables sont proportionnels, les côtez homologues seront aussi proportionnels.

LA démonstration de cette Proposition est tout-à-fait la même que celle qui a été faite à l'égard des Polygones semblables dans la 22. 6. pourvû qu'à la place de la Raison doublée, on se serve de la Raison triplée, parce que les Parallelepipedes semblables sont en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues, *par Prop.* 33. C'est pourquoy nous n'en parlerons pas davantage.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME XXXIII.

Si deux Plans sont perpendiculaires entre eux, la perpendiculaire tirée d'un point de l'un de ces deux Plans à l'autre, tombera sur la commune Section des deux mêmes Plans.

Je dis que si du point I, pris à discretion dans le Plan EFGH, que je suppose perpendiculaire au Plan ABCD, on tire à ce Plan ABCD, la perpendiculaire IK, cette perpendiculaire IK, tombera sur la commune section EH. Planche. 1. 3. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire du point I, dans le Plan EFGH, une ligne perpendiculaire à la commune Section EH, cette ligne perpendiculaire sera aussi perpendiculaire au Plan ABCD, *par Déf.* 4. & parce que *par Prop.* 13. on ne peut pas tirer deux lignes perpendiculaires à un même Plan, la même ligne perpendiculaire conviendra avec la premiere perpendiculaire IK, & ainsi rencontrera la commune Section EH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

On se sert tres-utilement de cette Proposition dans la Projection Ortographique de la Sphere, pour démontrer qu'*un Cercle perpendiculaire au Plan de projection s'y represente par une ligne droite* : & aussi dans la Gnomonique, pour démontrer qu'*un grand Cercle perpendiculaire au Plan du Cadran, s'y represente par une ligne droite qui passe par le pied du Style.*

Cette Proposition semble avoir été transposée, car elle regarde seulement les lignes & les Plans, & elle devroit avoir été mise au commencement de ce Livre, pour le moins aprés la *Prop.* 13. qui sert pour sa demonstration.

Nous omettons la Prop. XXXIX. *parce qu'elle n'est pas de grande consequence.*

Planche 2. 23. Fig.

PROPOSITION XL.

THEOREME XXXV.

Le Prisme, qui a pour base un Parallelogramme double de la base triangulaire d'un autre Prisme de même hauteur, est égal à cet autre Prisme triangulaire.

JE dis que si les hauteurs AE, FK, des deux Prismes triangulaires ABCDE, FGHIK, sont égales, & que la base FGHO du second soit un Parallelogramme double de la base triangulaire ABP, du premier, ces deux Prismes sont égaux entre eux.

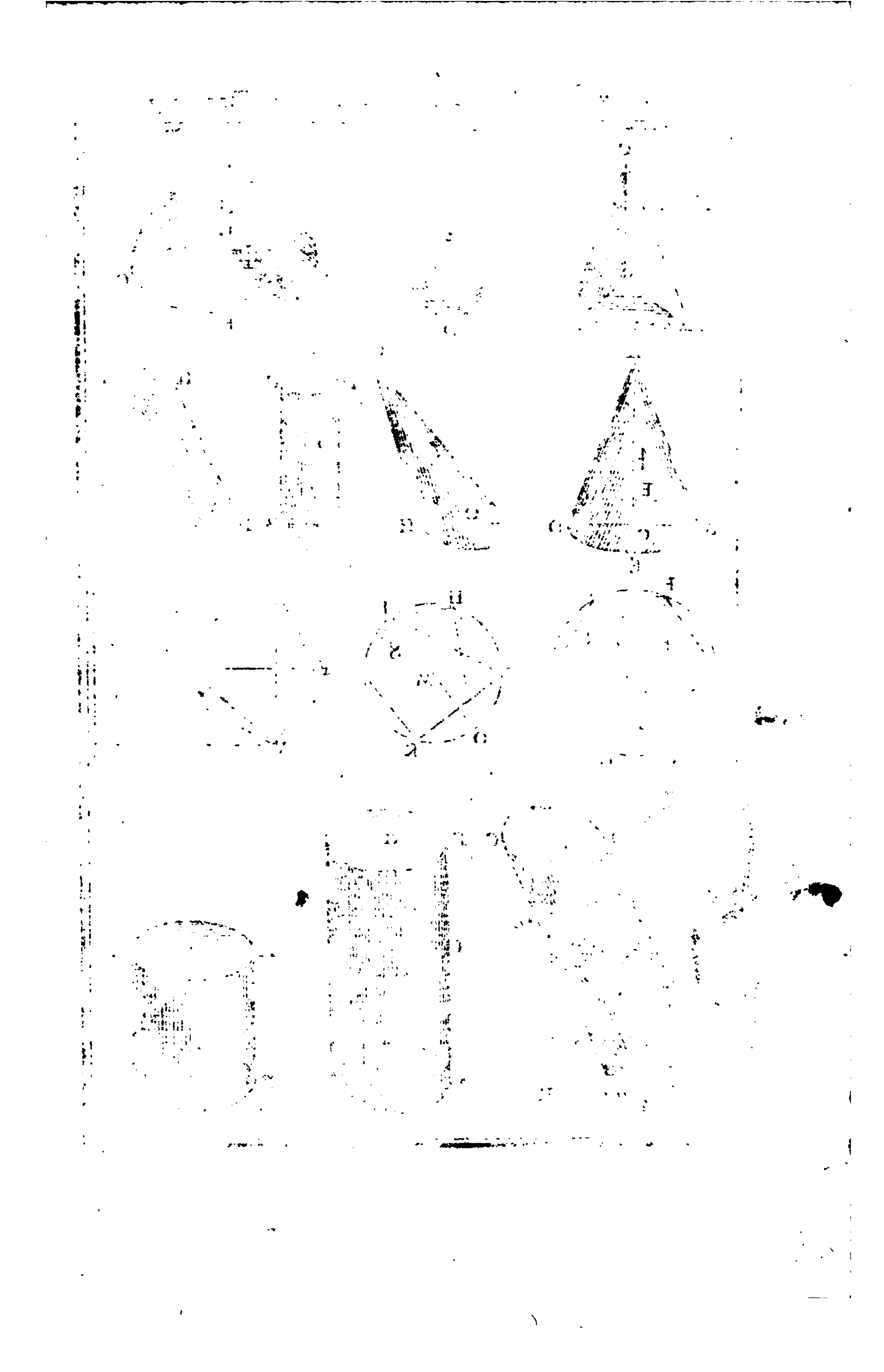
DEMONSTRATION.

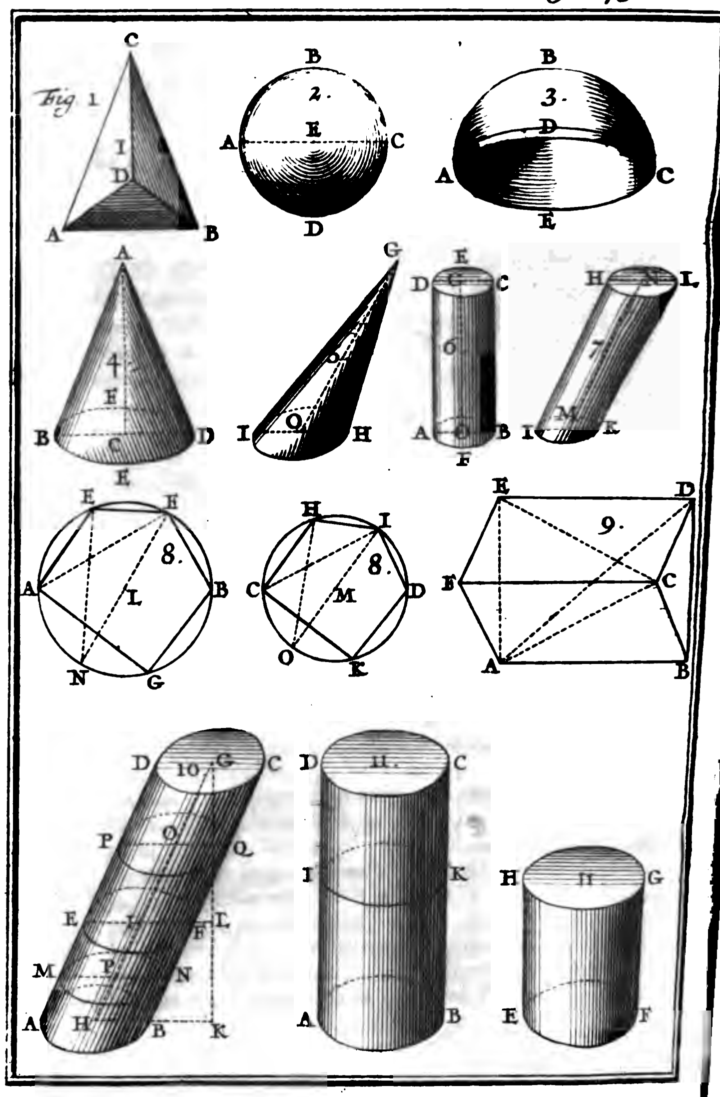
Si l'on acheve le Parallelogramme ABLF, qui sera double du triangle ABP, *par* 34. 1. & par consequent égal au Parallelogramme FGHO, qui est aussi double du triangle ABF, *par supp.* & que l'on acheve aussi les Parallelepipedes ABMD, FGNI, on connoîtra *par Prop.* 31. que ces deux Parallelepipedes sont égaux entre eux, & que par consequent les Prismes ABD, FGI, qui en sont les moitiez, *par Prop.* 28. sont aussi égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

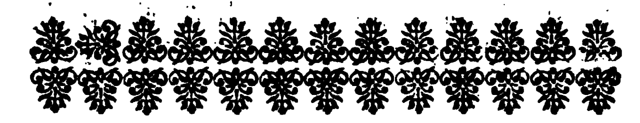
USAGE.

Cette Proposition nous enseigne à trouver la Solidité d'un Prisme triangulaire, ce qui se fera en multipliant sa base triangulaire par la hauteur, ou bien si l'on prend l'une de ses autres surfaces qui sont des Parallelogrammes, pour la base, en multipliant cette base par la moitié de la hauteur, parce qu'en la multipliant par la hauteur entiere, on a la solidité d'un Parallelepipede, qui est double du Prisme. C'est sur ce Principe que l'on mesure les corps taludez, comme vous verrez dans la *Geometrie Pratique.*

LIVRE




Fig. 1
2.
3.
4
6
7
8.
8.
9.
10
11.
11



LIVRE XII.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

EUclide aprés avoir traité dans le Livre precedent des Prismes & des Parallelepipedes, il explique dans celuy-cy les proprietez des autres Corps plus difficiles, sçavoir de ceux qui sont terminez par des Surfaces courbes, comme du Cone, du Cylindre, & de la Sphere, sur lesquels le sçavant Archimede nous a donné de tres-belles démonstrations.

DEFINITIONS.

I.

La *Pyramide* est un Solide terminé par plusieurs Plans triangulaires, qui se rencontrent en un même point, & qui ont un autre Plan pour base : *comme ABCD, que l'on appelle* Pyramide triangulaire, *parce que sa base ABC est un Triangle, une Pyramide prenant sa dénomination de la figure de sa base.* Planche 1. Fig.

Il est évident qu'une Pyramide ne peut pas avoir moins de quatre Surfaces, en y comprenant la base, lesquels donnent le nom de *Tetraëde* à la Pyramide, quand elles sont des Triangles égaux entre eux, & équilateraux.

La *Sphere* est un Solide terminé par une seule Surface, au dedans de laquelle il y a un point, duquel toutes les lignes droites tirées jusqu'à la Surface sont égales entre elles : *comme ABCD.*

Il est évident qu'une Sphere est causée par la circonvolution entiere d'un demi-cercle autour de son Diametre. Comme 2. Fig.

Planche 1. 2. Fig. si autour du Diametre AC, on fait mouvoir par pensée le demi-cercle ABC, en sorte que la circonference ABC, cesse de se mouvoir par où elle a commencé, ce mouvement produira la Sphere ABCD.

III.

L'*Axe d'une Sphere* est cette ligne ou diametre immobile, autour duquel on imagine qu'un demi-cercle roule pour produire la Sphere : *comme AC*.

Cette ligne a été ainsi appellée du nom Latin *Axis*, qui signifie Aissieu.

IV.

Le *Centre d'une Sphere* est ce point, duquel toutes les lignes droites tirées jusqu'à sa Surface, sont égales entre elles : *comme E*.

3. Fig. Il est évident que si l'on coupe une Sphere par un Plan, qui passe par son centre, la section sera un Cercle, comme ADCE, & que la Sphere sera coupée en deux parties égales, dont chacune s'appelle *Hemisphere*, comme ABCD, dont la Surface exterieure se nomme *Surface convexe* & l'interieure s'appelle *Surface concave*. Ce qui fait dire que nous voyons la Surface concave du Ciel, & que les Bien-heureux en voyent la Surface convexe.

V.

Le *Diametre d'une Sphere* est une ligne droite tirée par le centre de la Sphere, & terminée de part & d'autre à sa surface : *comme AC*.

2. Fig. Il est évident que tout Axe est un Diametre, mais que tout Diametre n'est pas un Axe. Il est évident aussi qu'une Sphere a comme le Cercle, une infinité de Diametres, qui sont tous égaux entre eux, dont les moitiez, qui partent du centre de la Sphere, & se terminent à sa surface, se nomment, comme dans le Cercle, *Demi-diametres*, ou *Rayons*.

VI.

Le *Cone* est un Solide terminé par deux Surfaces, qui sont produites par la circonvolution entiere d'un Triangle rectangle autour de l'un des deux côtez qui font l'angle droit.

Comme

Comme si l'on fait mouvoir par pensée le Triangle rectangle ACD, autour du côté immobile AC, en sorte que la circonvolution soit parfaite, c'est à dire que le côté CD cesse de se mouvoir là où il aura commencé, le Triangle ACD décrit par cette circonvolution entiere le Cone ABED, qui s'appelle Cone rectangle, *quand le Triangle rectangle ACD, que l'on peut appeller* Triangle generateur, *est isoscéle :* Cone amblygone, *quand le côté immobile AC est plus petit que l'autre côté CD :* & Cone oxygone, *quand le côté immobile AC est plus grand que l'autre côté CD, comme il arrive dans cette figure.* 4. Fig.

On appelle aussi *Cone*, un Solide qui est produit par le mouvement d'un Triangle obliquangle, c'est à dire qui n'a point d'angle droit : & alors pour distinguer ce Cone d'avec le precedent que l'on peut appeller *Cone droit*, on le nomme *Cone incliné*, comme GHI, qui est produit par le mouvement du Triangle obliquangle GOH, autour du côté immobile GO. 5. Fig.

VII.

L'*Axe d'un Cone* est le côté immobile du Triangle generateur : *comme AC qui passe par le centre C de sa base, & qui luy est perpendiculaire, quand le Cone est droit.* 4. Fig.

VIII.

Le *Cylindre* est un Solide terminé par trois Surfaces, qui sont produites par la circonvolution entiere d'un Parallelogramme rectangle autour de l'un des deux côtez qui font l'angle droit.

Comme si l'on fait mouvoir par pensée le Parallelogramme rectangle GOBC, autour du côté immobile GO, en sorte que la circonvolution soit achevée, c'est à dire que par cette circonvolution entiere le côté OB cesse de se mouvoir là où il aura commencé ; le Parallelogramme BCGO, décrit par cette circonvolution entiere le Cylindre ABCD. 6. Fig.

On appelle aussi *Cylindre*, un Solide qui est produit par le mouvement d'un Parallelogramme qui n'a point d'angle droit, & alors pour distinguer ce Cylindre d'avec le precedent, que l'on peut appeller *Cylindre droit*, on le nomme *Cylindre incliné* comme HIKL, qui est produit par le mouvement du Parallelogramme obliquangle KLNM, autour du côté immobile MN. 7. Fig.

IX.

6. Fig. L'*Axe d'un Cylindre* est le côté immobile du Parallelogramme, qui par son mouvement a décrit le Cylyndre : *Comme GF, qui est perpendiculaire à ses deux bases, quand le Cylindre est droit.*

X

La *Base d'un Cone* est un Cercle, qui est décrit par le mouvement du côté mobile du Triangle gene-
4. Fig. rateur : *comme BED, dont le centre est C, par lequel passe l'Axe AC.*

XI.

Les *Bases d'un Cylindre*, sont deux Cercles opposez égaux, & paralleles qui ont été décrits par le mouvement des deux côtez opposez égaux & paralleles du
6. Fig. Parallelogramme generateur : *comme DEC, AFB, dont les centres sont G, O, par où passe l'Axe GF.*

XII.

Les *Cones & les Cylindres semblables* sont ceux dont les Axes sont proportionnels aux Diametres de leurs bases.

Cette Définition appartient aux Cones & aux Cylindres droits, car aux inclinez il faut ajoûter que les Axes sont semblablement inclinez sur leurs bases.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

Les Polygones semblables inscrits dans des Cercles sont en même Raison que les Quarrez des Diametres de ces Cercles.

8. Fig. JE dis que si les Polygones AEFBG, CHIDK, inscrits dans les Cercles, dont les Centres sont

ont L, M, sont semblables, ils sont en même Raison que les Quarrez des Diametres FN, IO. Planche 1. 8. Fig.

PREPARATION.

Tirez des deux angles égaux F, I, par les centres L, M, les Diametres FN, IO, & des deux autres angles prochains & égaux E, H, par les extremitez N, O, de ces Diametres, menez les droites EN, HO. Tirez encore les droites AF, CI.

DEMONSTRATION.

Parce que les angles AEF CHI, sont égaux, *par supp.* & que la Raison des deux côtez AE, EF, est égale à celle des deux CH, HI, à cause de la similitude des deux Polygones, les deux triangles AEF, CHI, seront semblables, *par* 6. 6. & les deux angles EAF, HCI, seront égaux entre eux, lesquels étant égaux aux deux ENF, HOI, *par* 21. 3. il s'ensuit que ces deux ENF, HOI, sont aussi égaux entre eux, & *par* 32. 1. que les deux triangles NEF, OHI, qui sont rectangles, *par* 31. 3. sont équiangles: d'où l'on conclud *par* 4. 6. que les quatre lignes EF, HI, FN, IO, sont proportionnelles, & *par* 22. 6. que le Polygone AEFBG décrit sur la premiere EF, est au Polygone semblable CHIDK, décrit sur la seconde HI, comme le Quarré de la troisiéme FN, est au quarré de la quatriéme IO. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert comme de Lemme à la suivante, & aussi pour la démonstration de la *Prop.* 12. & comme nous avons démontré dans les triangles rectangles semblables NEF, OHI, que la Raison du côté EF, au côté homologue HI, est égale à la Raison du Diametre FN, au Diametre IO, il s'ensuit à cause de la similitude des Polygones, que le côté AE, est aussi à son côté homologue CH, comme le Diametre FN, au Diametre IO, & ainsi de tous les autres côtez. D'où il est aisé de conclure *par* 12. 5. que le contour du Polygone du Cercle AB, est au contour du Polygone semblable du Cercle CD, comme le Diametre FN, au Diametre IO. Mais

8. Fig. comme le contour approche d'autant plus de la circonference du Cercle, que plus le Polygone inscrit a de côtez, de sorte qu'il se change en la circonference du Cercle, lorsque le Polygone inscrit a une infinité de côtez, il est évident que la circonference du Cercle AB est à son Diametre FN, comme la circonference du Cercle CD, est à son Diametre IO. Ce qui sert pour trouver la circonference d'un Cercle par son Diametre connu, ou le Diametre d'un Cercle par sa circonference connuë si l'on a une fois connu la Raison qui est entre le Diametre d'un Cercle & sa circonference, qui est à peu prés égale à celle de 100. à 314, comme nous enseignerons dans la *Geometrie Pratique*.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Les superficies des Cercles sont en même Raison que les Quarrez de leurs Diametres.

8. Fig. JE dis que l'aire du Cercle AB, est à celle du Cercle CD, comme le Quarré du Diametre FN, au Quarré du Diametre IO.

DEMONSTRATION.

Parce que *par Prop.* 1. le Polygone décrit dans le Cercle AB est au Polygone semblable décrit dans le Cercle CD, comme le Quarré du Diametre FN, au Quarré du Diametre IO, & que ce Theorême est généralement veritable à l'égard de tous les Polygones, lesquels dégenerent en Cercles, quand ils sont reguliers & d'une infinité de côtez; il s'ensuit que les Cercles AB, CD, sont comme les Quarrez de leurs Diametres FN, IO. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de cette Proposition, que les Cercles sont en Raison doublée de celle de leurs Diametres, parce que les Quarrez de leurs Diametres sont en Raison doublée de celle de leurs côtez qui sont les Diametres même.

COROL-

COROLLAIRE. II.

8. Fig.

Il s'ensuit encore, que les Cercles sont en même Raison que les Polygones semblables qui y sont inscrits, parce que les uns & les autres sont en même Raison que les Quarrez des Diametres des Cercles.

USAGE.

Cette Proposition sert pour connoître l'aire d'un Cercle donné, par le moyen de son Diametre connu, si l'on a une fois connu la Raison qui est entre l'aire d'un Cercle, & le Quarré de son Diametre, qui est environ égale à celle de 785 à 1000, comme nous enseignerons dans la *Geometrie Pratique.*

Les Prop. III. & IV. sont inutiles, *parce qu'elles ne servent que pour la démonstration des* Prop. V. & VI. *que nous démontrerons autrement & plus facilement, sçavoir par la Geometrie des Indivisibles.*

PROPOSITION V. & VI.

THEOREME V. & VI.

Les Pyramides de même hauteur sont en même Raison que leurs Bases.

Il est évident que les Pyramides de même hauteur, sont entre elles comme leurs bases, soit que ces bases soient triangulaires, comme porte la *Prop. V.* ou Polygones, comme porte la *Prop. VI.* parce que si par tous les points de chaque hauteur, que l'on suppose égale, on fait passer par pensée des Plans paralleles aux bases des Pyramides, ces Plans diviseront chaque Pyramide en autant de Plans l'une que l'autre, qui seront semblables chacun à leur base; c'est pourquoy il y aura même Raison d'un Plan d'une Pyramide à sa Base, que d'un Plan correspondant d'une autre Pyramide à sa base, *par* 22. 6. parce que les Plans & les bases ont les côtez proportionnels, à cause du même Plan qui coupe proportion-

 nellement

4. Fig. nellement les hauteurs. D'où l'on conclud *par* 12. 5. que tous les Plans semblables qui remplissent la Pyramide, c'est à dire toute la Pyramide est à sa base, comme autant de Plans semblables qui remplissent l'autre Pyramide, c'est à dire toute cette Pyramide, est à sa base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer la suivante, qui suppose que les Pyramides de bases égales & de même hauteur, sont égales entre elles, ce qui s'ensuit évidemment de ce qui vient d'être démontré.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Une Pyramide est la troisiéme partie d'un Prisme de même base & de même hauteur.

5. Fig. JE dis premierement, qu'une Pyramide qui aura pour base l'un des deux triangles BCD, AEF, qui sont les deux bases paralleles semblables, & égales du Prisme triangulaire ABCDEF, & qui sera de même hauteur que ce Prisme, par exemple la Pyramide ABCD, sera la troisiéme partie du même Prisme.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les trois diagonales AC, AD, CE, qui diviseront en deux également leurs Parallelogrammes, *par* 34. 1. on connoîtra que le Prisme ABCDEF est composé des trois Pyramides triangulaires ABCD, ACDE, ACEF, qui sont égales entre elles : car les deux premieres ABCD, ACDE, ayant le même sommet C, & par consequent la même hauteur, & leurs bases ADB, ADE, étant égales, *par* 34. 1. sont égales entre elles, *par Prop.* 5. On connoîtra de la même façon, que les deux dernieres Pyramides ACDE, ACEF, sont égales entre elles, parce qu'elles ont le même sommet A, & par consequent la même hauteur, & que leurs bases CED, CEF, sont

ſont égales. D'où il ſuit que ces trois Pyramides ſont égales entre elles, & que par conſequent la Pyramide ABCD, eſt la troiſiéme partie du Priſme triangulaire ABCDEF, de même baſe & de même hauteur. *Ce qu'il falloit démontrer.* 9. Fig.

Je dis en ſecond lieu, que la Pyramide qui aura pour baſe une autre figure qu'un triangle, elle ſera encore la troiſiéme partie du Priſme polygone, qui aura la même baſe & la même hauteur, parce que ce Priſme polygone ſe pourra diviſer en Priſmes triangulaires, ce qui diviſera auſſi la Pyramide en autant de Pyramides triangulaires, chacune deſquelles ſera la troiſiéme partie de ſon Priſme. D'où l'on conclud *par* 12. 5. que la Pyramide polygone eſt auſſi la troiſiéme partie de ſon Priſme polygone. *Ce qui reſtoit à démontrer.*

USAGE.

Cette Propoſition ſert pour la démonſtration des ſuivantes, & auſſi pour trouver la Solidité d'une Pyramide, dont on connoît la baſe & la hauteur : car comme en multipliant la baſe d'une Pyramide par ſa hauteur, on a la Solidité d'un Priſme, qui eſt triple de la Pyramide, en prenant le tiers de cette Solidité, ce qui eſt la même choſe que de multiplier la baſe par le tiers de la hauteur, ou la hauteur par le tiers de la baſe, on aura la Solidité de la Pyramide propoſée.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Les Pyramides ſemblables ſont en Raiſon triplée de celle de leurs côtez homologues.

CEtte Propoſition ſera évidente, ſi l'on imagine ſur les baſes des Pyramides, des Priſmes ſemblables de même hauteur, leſquels étant entre eux, en Raiſon triplée de celle de leurs côtez homologues, *par* 33. 11. les Pyramides ſemblables qui en ſont les troiſiémes parties *par Prop.* 7. ſeront auſſi entre elles en Raiſon triplée de celle de leurs côtez homologues. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Les Pyramides égales ont les hauteurs & les bases reciproques : & celles qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont égales.

JE dis premierement, que si deux yramides sont égales entre elles, la base de la premiere est à la base de la seconde, comme la hauteur de la seconde est à la hauteur de la premiere.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine sur les bases des deux Pyramides des Prismes de même hauteur, ces Prismes seront égaux entre eux, parce que *par Prop.* 7. ils seront triples des Pyramides qui sont égales, *par supp.* C'est pourquoy *par* 34. 11. les bases & les hauteurs de ces Prismes, qui sont les mêmes que celles des Pyramides, seront reciproques. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que si les bases & les hauteurs sont reciproques, c'est à dire que si la base de la premiere Pyramide est à la base de la seconde, reciproquement comme la hauteur de la seconde, est à la hauteur de la premiere, ces deux Pyramides sont égales entre elles.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine comme auparavant, sur les bases des deux Pyramides, des Prismes de même hauteur, on connoîtra *par* 34. 11. que ces deux Prismes seront égaux entre eux, parce que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, *par supp.* C'est pourquoy les Pyramides qui en sont les troisiémes parties, *par Prop.* 7. seront aussi égales entre elles. *Ce qui restoit à démontrer.*

PRO-

PROPOSITION X.

THEOREME X.

Un Cone est la troisiéme partie d'un Cylindre de même base & de même hauteur.

CEtte Proposition sera évidente, si l'on considere qu'un Cone est une Pyramide d'une infinité de côtez, & que pareillement un Cylindre est un Prisme d'un nombre infini de côtez : & comme une Pyramide est le tiers d'un Prisme de même base & de même hauteur, il s'ensuit qu'un Cone est aussi le tiers d'un Cylindre de même base & de même hauteur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XI.

THEOREME XI.

Les Cylindres & les Cones de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.

CEtte Proposition sera aussi évidente, si l'on considere que les bases des Cylindres & des Cones étant des Cercles, c'est à dire des Polygones reguliers d'une infinité de côtez, que les Cylindres sont des Prismes d'un nombre infini de côtez, & les Cones des Pyramides d'une infinité de côtez. C'est pourquoy ce que nous avons dit des Prismes dans la 32. 11. & dans les *Prop.* 5. & 6. se doit aussi entendre des Cylyndres & des Cones.

PROPOSITION XII.

THEOREME XII.

Les Cylindres & les Cones semblables sont en Raison triplée de celle des Diametres de leurs bases.

JE dis premierement, que les Cylindres semblables sont en Raison triplée de celle des diametres de leurs bases, qui sont des Cercles.

DE-

DEMONSTRATION.

En considerant toûjours un Cylindre comme un Parallelepipede, ou comme un Prisme d'une infinité de côtez, & un Cercle comme un Polygone regulier d'un nombre infini de côtez, on connoîtra *par* 33. 11. que les Cylindres semblables sont en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues, & par consequent de celles des Diametres de leurs bases, qui sont en même Raison que les côtez homologues des Polygones semblables inscrits dans ces bases, *par Prop.* 1. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que les Cones semblables sont aussi en Raison triplée de celle des Diametres de leurs bases.

DEMONSTRATION.

Si l'on considere pareillement un Cone comme une Pyramide d'une infinité de côtez, on connoîtra *par Prop.* 8. que les Cones sont en Raison triplée de celle de leurs côtez homologues, qui est la même que celle des Diametres de leurs bases, *par Prop.* 1. & que par consequent ces Cones sont en Raison triplée de celle des Diametres de leurs bases. *Ce qui restoit à démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de cette Proposition, que les Cones semblables sont aussi en Raison triplée, ou comme les Cubes de leurs Axes, parce que ces Axes sont en même Raison que les Diamêtres de leurs bases, à cause des angles égaux que font les Axes avec les Diametres, puisque les Cones sont supposez semblables.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi que les Cones semblables sont en Raison triplée, ou comme les Cubes de leurs côtez inclinez sur leurs bases, parce que ces côtez sont proportionnels aux Diametres des bases, à cause des angles égaux que font les côtez avec les Diametres. D'où il est aisé de conclure, que les Cylindres & les Cones semblables sont aussi en Raison

son

son triplée de celle de leurs hauteurs, ce qui servira pour la démonstration de la *Prop.* 18.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XIII.

Si un Cylindre est coupé par un Plan parallele à sa base, les parties de l'Axe seront en même Raison que les parties du Cylindre.

JE dis que si le Cylindre ABCD est coupé par le Plan EF parallele à la base AB, ou CD, qui coupe l'Axe GH au point I; il y aura même Raison du Cylindre ABFE, au Cylindre EFCD, que de la partie HI à la partie IG. 10. Fig.

PREPARATION.

Divisez chacune des deux parties GI, HI, en deux également aux points O, P, & faites passer par ces points de milieu, O, P, les Plans PQ, MN, paralleles à la base AB, qui diviseront le Cylindre EFCD en deux Cylindres égaux FFQP, PQCD, & aussi le Cylindre ABFE, en deux Cylindres égaux ABNM, MNFE, *par Prop.* 11. parce que leurs hauteurs sont égales entre elles, aussi bien que leurs bases.

DEMONSTRATION.

Parce que *par* 15. 5. le Cylindre AF est à sa moitié AN, comme le Cylindre EC est à sa moitié EQ: & que pareillement la partie HI est à sa moitié HP, comme la partie IG est à sa moitié IO, la Proportion qui est entre les quatres Cylindres AF, AN, EC, EQ, est semblable à celle qui est entre les quatre parties HI, HP, IG, IO; c'est pourquoy en changeant *par* 16. 5. on connoîtra qu'à cause des hauteurs égales, la Proportion qui est entre les quatre Cylindres AF, EC, AN, EQ, est semblable à celle qui est entre les quatre parties HI, IG, HP, IO, & que par consequent dans cette seconde Proportion, la Raison du premier Cylindre AF, au second EC, est égale à celle de la premiere partie HI, à la seconde IG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCO-

10. Fig.

SCOLIE.

Nous avons fait cette démonstration differente de celle que l'on donne communément, qui suppose que les deux parties HI, IG, ont une commune mesure, ce qui est trop particulier, parce qu'elles peuvent être incommensurables. C'est à cause de cela que nous avons démontré aussi de la même façon la premiere & la derniere Proposition du sixiéme Livre.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que les Cylindres qui ont des bases égales, sont en même Raison que leurs hauteurs, ce qui servira pour la démonstration de la Proposition suivante. Car si de l'extremité G, de l'Axe GH, on tire la droite GK, perpendiculaire au Plan de la base AB, qui sera aussi perpendiculaire au Plan de la base EF, & que les lignes HK, IL, soient les communes sections des deux Plans paralleles AB, EF, avec le Plan triangulaire GKH, on connoîtra *par* 16. 11. que ces deux communes sections HK, IL, sont paralleles, & *par* 2. 6. que la Raison de HI à IG, qui a été démontrée la même que celle des deux Cylindres AF, EC, dont les bases AB, EF, sont égales entre elles, est égale à celle de la hauteur KL, à la hauteur LG.

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIV.

Les Cylindres & les Cones de même base, sont en même Raison que les hauteurs.

11. Fig. JE dis premierement, que la Raison des deux Cylindres ABCD, EFGH, que je suppose droits, est égale à celle de leurs hauteurs AD, EH, si leurs bases AB, EF, sont égales entre elles.

PREPARATION.

Retranchez de la plus grande hauteur AD, la partie AI égale à la plus petite hauteur EH, & faites passer par le point I le Plan IK, parallele à la base AB, lequel *par Prop.* 11. retranchera le Cylindre AK, égal au Cylindre EG.

DE-

DEMONSTRATION. 11. Fig.

Parce que le Cylindre AC, est au Cylindre AK, comme la hauteur AD, est à la hauteur AI, *par Prop.* 13. & que le Cylindre AK est égal au Cylindre EG, & la hauteur AI égale à la hauteur EH, *par constr.* le Cylindre AC sera aussi au Cylindre EG, comme la hauteur AD, à la hauteur EH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dis en second lieu, que les Cones dont les bases sont égales, sont aussi en même Raison que leurs hauteurs, parce qu'ils sont les troisiémes parties des Cylindres, *par Prop.* 10. dont la Raison a été démontrée égale à celle de leurs hauteurs.

PROPOSITION XV.

THEOREME XV.

Les Cylindres & les Cones égaux ont les bases & les hauteurs reciproques : & ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont égaux.

CEtte Proposition est évidente, *par* 34. 11. à l'égard des Cylindres, qui sont des Parallelepipedes de côtez infinis : & aussi à l'égard des Cones, *par Prop.* 10. puisqu'ils sont les troisiémes parties des Cylindres.

Nous omettrons les Prop. XVI. & XVII. *parce qu'elles sont fort difficiles, & qu'elles ne servent que pour la démonstration de la suivante, que nous démontrerons autrement & plus facilement, comme vous allez voir.*

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVIII.

Les Spheres sont en Raison triplée de celle de leurs Diametres.

CEtte Proposition sera évidente, si l'on considere qu'une Sphere est composée d'une infinité de petits Cones égaux, dont la pointe commune est le cen-

centre de la Sphere, & la hauteur commune est le Rayon de la même Sphere, & dont les bases, qui étant infiniment petites, peuvent passer pour des Plans, sont dans la Surface de la Sphere : & que par consequent la somme de tous ces Cones de même hauteur, c'est à dire la Solidité de la Sphere est égale à un seul Cone, dont la hauteur est le même Rayon de la Sphere, & la base est la surface entiere de la Sphere; & comme le Cone égal à cette Sphere est semblable à un Cone égal à une autre Sphere, parce que toutes les Spheres sont semblables, & que les Cones semblables sont en Raison triplée de leurs hauteurs qui sont icy les Rayons des deux Spheres, ausquelles elles sont égales, il s'ensuit que ces deux Spheres sont aussi en Raison triplée de leurs Rayons ou Demi-diametres; & par consequent de leurs Diametres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que les Spheres sont en même Raison que les Cubes de leurs Diametres, parce que les Cubes sont des Solides semblables, qui par 33. 11. sont en Raison triplée de leurs côtez.

USAGE.

Cette Proposition sert pour mesurer la Solidité d'une Sphere, dont on connoît le Diametre, si l'on a une fois connu la Raison qui est entre une Sphere & le Cube de son Diametre, qui est à peu prés égale à celle de 157 à 300. comme nous enseignerons dans la *Geometrie*.

FIN.

TABLE

Des Termes expliquez dans les Elemens d'Euclide.

A

B

C

D

P

Q

Quan-

Rhombe.

Fin de la Table.